

SULLE SUPERFICIE GOBBE DEL TERZ' ORDINE.

Atti del Reale Istituto Lombardo, volume II (1861), pp. 291-302.

1. Io mi propongo, in questa Memoria, d'investigare coi metodi della pura geometria, alcune interessanti proprietà delle superficie gobbe del terz'ordine. Non so se altri siasi già occupato di questo argomento.

Avrò a far uso della seguente proposizione, dovuta all'illustre CHASLES: Se sopra una data retta si ha una serie di punti m , ed una serie di segmenti $m' m''$ in involuzione, e se le due serie sono proiettive (cioè si corrispondono anarmonicamente), vi sono in generale tre punti m , ciascuno de' quali coincide coll'uno o coll'altro de' suoi corrispondenti m' , m'' . Infatti, presa un'origine o sulla data retta, s'indichi con z il segmento om , e con x l'uno o l'altro de' segmenti om' , om'' ; la proiettività delle due serie sarà generalmente espressa da un'equazione della forma:

$$x^2(az + b) + x(a'z + b') + (a''z + b'') = 0,$$

ove, posto $x = z$, l'equazione risultante è del terzo grado in z ; da cui si conclude la verità dell'enunciato teorema. I tre punti accennati si ottengono geometricamente, mediante le eleganti costruzioni date dallo stesso signor CHASLES *).

2. Devesi al celebre matematico inglese CAYLEY l'importante osservazione, che in una superficie gobba l'*ordine* è eguale alla *classe*. Infatti, il numero delle generatrici rettilinee incontrate da una retta arbitraria è evidentemente eguale al numero dei punti comuni a questa retta ed alla superficie, ed anche al numero de' piani tangenti che per la retta stessa si possono condurre. Segue da ciò, che alle superficie gobbe, di qualsivoglia ordine, compete quella dualità di proprietà geometriche che si riscontra

*) *Comptes rendus de l'Académie de Paris*, tom. XLI, pag. 677. Veggansi anche i *Mélanges de géométrie pure* del signor JONQUIÈRES, pag. 162.

nelle superficie del second'ordine, appunto perchè esse sono in pari tempo della seconda classe.

Per esprimere con una sola parola il doppio concetto dell'*ordine* e della *classe*, dirò che una superficie gobba è del grado n , quando una retta arbitraria incontra n sue generatrici rettilinee.

3. Sia proposta una superficie gobba Σ del terzo grado; assunte ad arbitrio quattro generatrici G, H, K, L , siano D, E le due rette che le incontrano tutt'e quattro. Ciascuna delle rette D, E ha quattro punti in comune colla superficie data, epperò giace per intero in essa.

Considero ora il piano EG , il quale contenendo già, oltre la retta E , la generatrice G , segnerà la superficie in una nuova generatrice G' , poichè la sezione fatta da un piano qualsivoglia è una linea d'ordine eguale a quello della superficie. Le tre rette E, G, G' costituiscono la completa intersezione di quel piano colla superficie; dunque il piano medesimo sega tutte le generatrici in punti appartenenti alla retta E ; ossia, tutte le generatrici della superficie Σ incontrano la retta E . Per la stessa ragione, esse incontrano la retta D ; dunque D, E sono due direttrici rettilinee della proposta superficie. È evidente che non vi può essere una terza direttrice rettilinea; epperò:

Ogni superficie gobba del terzo grado ammette due direttrici rettilinee.

Considerando di nuovo il piano EGG' , e ritenendo che le generatrici G, G' incontrino la direttrice E in due punti distinti, esse andranno necessariamente ad incontrare l'altra direttrice D in uno stesso punto, là, cioè, dove questa attraversa il piano EGG' . In questo punto la direttrice è incontrata da due generatrici, epperò ivi la superficie Σ ammette due piani tangenti, DG e DG' ; dunque, quello è un *punto doppio*. Analogamente è un punto doppio quello in cui la direttrice D è incontrata da qualunque altra generatrice: il che significa essere D una *retta doppia* sulla superficie Σ . Da ogni punto di D partono due generatrici, situate in un piano passante per E . Ogni piano passante per D contiene una sola generatrice: la retta D conta per *due* nel grado della sezione. Ossia:

Ogni superficie gobba del terzo grado ha una retta doppia, la quale è una delle due direttrici rettilinee.

4. Una superficie gobba di terzo grado non può avere altra linea multipla. In fatti, un piano *qualsivoglia* sega la superficie in una linea del terz'ordine, e le linee multiple di quella in punti, che sono multipli per questa linea. Ora, una linea del terz'ordine non può avere più di un punto multiplo, senza degenerare nel sistema di una retta ed una conica, o nel sistema di tre rette; e d'altronde se un piano *qualsivoglia* segasse la superficie secondo una retta ed una conica, ovvero secondo tre rette,

la superficie stessa sarebbe evidentemente il complesso di un piano e d'una superficie di second'ordine, ovvero di tre piani.

Nè la retta singolare D può divenire *cuspidale*, in luogo d'essere puramente *doppia*. Perchè, se in ogni punto di D i due piani tangenti alla superficie coincidessero, coinciderebbero anco le due generatrici che partono da quello; epperò da ogni punto di D , come da ogni punto di E , partirebbe una sola generatrice. Dunque le rette D , E sarebbero dalle generatrici divise omograficamente, e la superficie diverrebbe un iperboloide.

Se una superficie di terz'ordine ha una retta doppia, ogni piano passante per questa segnerà la superficie in una retta; dunque:

Ogni superficie di terz'ordine, nella quale sia una retta doppia, è rigata.

5. Dal fatto che per ciascun punto della direttrice doppia D passano due generatrici poste in un piano passante per la seconda direttrice E , risulta che:

In ciascun punto della retta doppia di una superficie gobba di terzo grado, questa è toccata da due piani; tali coppie di piani formano un'involuzione. Ciascun piano passante per l'altra direttrice rettilinea tocca la superficie in due punti; tali coppie di punti sono in involuzione. Le due involuzioni sono prospettive (cioè i piani della prima passano pei punti della seconda).

In altre parole: siccome le generatrici della superficie Σ a due a due incontrano in uno stesso punto la retta doppia D , e sono in un piano passante per l'altra direttrice E , così esse generatrici determinano coi loro punti d'appoggio una serie di segmenti in involuzione sulla retta E , ed una semplice serie di punti sulla retta D ; e le due serie si corrispondono anarmonicamente. Se l'involuzione ha i punti doppi reali, e siano a' , b' , da essi partiranno due generatrici A , B , che andranno ad incontrare la retta doppia D nei corrispondenti punti a , b . Questi due punti hanno dunque la speciale proprietà, che da ciascun d'essi parte una sola generatrice, cioè in ciascun d'essi i due piani tangenti coincidono. Per conseguenza, essi sono due *punti cuspidali*. I piani tangenti in questi punti incontrano la direttrice E in a' e b' . È del pari evidente che i due piani EA , EB hanno, fra tutti i piani passanti per E , l'esclusiva proprietà di contenere, ciascuno, una sola generatrice, che conta per *due* nel grado della sezione; epperò ciascuno di questi piani tocca la superficie lungo tutta la rispettiva generatrice.

Le generatrici della superficie Σ determinano a due a due una coppia di piani passanti per D , ed un solo piano passante per E ; ossia determinano due fasci proiettivi, l'uno doppio involutorio di piani passanti per D , l'altro semplice di piani passanti per E . I piani DA , DB sono evidentemente i piani doppi dell'involuzione anzidetta. Dunque:

I punti ne' quali le generatrici di una superficie gobba di terzo grado si appoggiano

alle due direttrici rettilinee, formano su queste due serie proiettive; ed invero, una serie semplice di punti sulla retta doppia, ed una serie di segmenti in involuzione sull'altra direttrice. I punti doppi di questa involuzione corrispondono ai punti cuspidali della retta doppia.

I piani passanti per l'una o per l'altra delle due direttrici rettilinee di una superficie gobba di terzo grado, formano due fasci proiettivi; ed invero, un fascio doppio involutorio intorno alla retta doppia, ed un fascio semplice intorno alla seconda direttrice. I piani doppi dell'involuzione sono quelli che toccano la superficie nei punti cuspidali della retta doppia.

6. Studiamo ora la questione inversa. Sian date due serie proiettive di punti, l'una semplice su d'una retta D, l'altra doppia involutoria sopra un'altra retta E; le due rette non situate in uno stesso piano. Di qual grado è la superficie luogo delle rette che uniscono i punti corrispondenti delle due serie? Immagino una retta arbitraria T, e per essa un fascio di piani prospettivo alla serie di punti su D. Questo fascio determinerà sulla retta E una serie di punti omografica a quella data su D; epperò in E avremo due serie proiettive di punti, l'una semplice e l'altra doppia in involuzione. Tali serie sopra una stessa retta ammettono in generale tre punti doppi; dunque la retta arbitraria T incontra tre generatrici, ossia la superficie descritta è del terzo grado. Per essa la retta D è evidentemente la retta doppia, ed E è la seconda direttrice. Dunque:

Data una serie di segmenti in involuzione sopra una retta ed una serie semplice di punti, proiettiva alla prima serie, sopra un'altra retta, le rette che uniscono i punti corrispondenti delle due serie formano una superficie del terzo grado.

Analogamente si dimostra che:

Dato un fascio involutorio di piani passanti per una retta, ed un altro fascio semplice, proiettivo al primo, di piani passanti per una seconda retta, le rette intersezioni de' piani corrispondenti formano una superficie del terzo grado.

A questi teoremi può anche darsi un'altra espressione. Sia o un punto fisso preso ad arbitrio nella retta doppia D; q un punto fisso in E; sia m un punto qualunque in E; m' il punto che gli corrisponde in D. Allora la corrispondenza anarmonica delle due serie di punti in D, E sarà espressa da un'equazione della forma:

$$(1) \quad \overline{qm}^2 (\lambda \cdot om' + \mu) + qm (\nu \cdot om' + \pi) + \rho \cdot om' + \sigma = 0,$$

ove $\lambda, \mu, \nu, \pi, \rho, \sigma$ sono costanti. Dunque:

Se in due rette date si prendono due punti fissi q, o , e due punti variabili m, m' , in modo che fra i segmenti qm, om' abbia luogo la relazione (1), la retta mm' genera una superficie del terzo grado.

Un analogo enunciato si può dedurre dalla considerazione de' due fasci di piani, di cui le rette D, E sono gli assi.

7. Una superficie gobba di terzo grado è completamente individuata dalle due serie proiettive di punti in D, E. Ciò posto, è ovvio come si risolverebbe il problema:

Costruire le tre generatrici incontrate da una retta data.

La soluzione di questo problema riducesi alla costruzione de' tre punti doppi di due serie proiettive, l'una semplice e l'altra involutoria, sopra una medesima retta.

È del pari facilissimo vedere come si risolvono questi altri problemi:

Per quattro rette, a due a due, non situate in uno stesso piano, e per un punto dato, far passare una superficie gobba di terzo grado. (Due soluzioni, o nessuna).

Costruire la superficie gobba di terzo grado di cui sian date la retta doppia e la seconda direttrice, ed inoltre cinque generatrici (ovvero cinque punti). (Una soluzione).

8. Prendiamo ora a considerare un piano tangente qualsivoglia della superficie Σ , il quale non passi nè per D, nè per E. Esso, oltre al contenere una generatrice, segnerà la superficie secondo una conica, la quale è incontrata dalla generatrice in due punti, e questi sono i due punti doppi in virtù de' quali la sezione, che in generale è una curva del terz'ordine, si risolve qui in una retta ed una conica. Ma anche il punto in cui il piano dato sega la retta doppia, dev'essere un punto doppio per la sezione; dunque uno de' punti in cui la generatrice incontra la conica, appartiene alla retta doppia. L'altro punto è quello in cui il piano tocca la superficie; ossia:

Ogni piano tangente ad una superficie gobba del terzo grado, il quale non passi per una delle direttrici rettilinee, sega la superficie secondo una conica che è incontrata dalla generatrice posta nel piano stesso in due punti. Uno di questi è il punto di contatto del piano colla superficie; l'altro è il punto in cui la generatrice s'appoggia alla retta doppia.

E per conseguenza:

La retta doppia di una superficie gobba del terzo grado si appoggia a tutte le coniche inscritte in questa.

Ne risulta anche che nessuna di queste coniche incontra la seconda direttrice, e che nessuna conica posta in un piano tangente non passante per una direttrice si risolve in due rette.

Osservo inoltre, che i piani EA, EB (reali o immaginari), toccando la superficie Σ lungo tutta una generatrice per ciascheduno, toccano anche le coniche in essa inscritte; ossia:

I piani tangenti (reali o immaginari) che per la direttrice non doppia di una superficie gobba del terzo grado si possono condurre ad una conica inscritta in questa, sono anche tangenti a tutte le altre coniche inscritte nella medesima superficie. I punti

di contatto sono situati nelle due generatrici, che incontrano la retta doppia ne' punti cuspidali.

9. Qual è il grado della superficie generata da una retta che si muova appoggiandosi costantemente ad una conica K e a due rette D, E , la prima delle quali incontri la conica in un punto? Immagino una retta arbitraria T ; tutte le rette che simultaneamente incontrano le tre rette D, E, T , formano un iperboloide, il quale sega il piano della conica K secondo un'altra conica. Le due coniche passano entrambe per la traccia di D , epperò si segheranno generalmente in tre altri punti; ossia l'iperboloide ha tre generatrici appoggiate alla conica K ; dunque tre sono le rette che incontrano a un tempo D, E, T e K , epperò:

La superficie generata da una retta mobile che si appoggi costantemente ad una conica ed a due rette, una delle quali abbia un punto comune colla conica, è del terzo grado. La direttrice rettilinea che ha un punto comune colla conica, è la retta doppia della superficie.

Viceversa, ogni superficie gobba del terzo grado ammette tale generazione.

10. Se consideriamo la direttrice E ed una conica K inscritta nella superficie Σ , ad ogni punto dell'una di esse corrisponde un punto nell'altra, e viceversa: i punti corrispondenti sono quelli per cui passa una stessa generatrice della superficie. Ossia:

Le generatrici di una superficie gobba del terzo grado determinano sulla direttrice rettilinea non doppia, e sopra una qualsivoglia conica inscritta nella superficie, due serie proiettive di punti.

Io ho già dimostrato, nella Memoria *Sur quelques propriétés des lignes gauches de troisième ordre et classe* *), il teorema inverso:

Date due serie proiettive di punti, l'una sopra una retta e l'altra sopra una conica, situate comunque nello spazio, le rette che uniscono i punti corrispondenti formano una superficie del terzo grado.

11. In virtù del principio di dualità, possiamo anche enunciare i seguenti teoremi, che si dimostrano colla stessa facilità de' precedenti.

Un punto qualunque di una superficie gobba del terzo grado, il quale non giaccia in una delle due direttrici rettilinee, è il vertice di un cono di secondo grado, circoscritto a quella. De' due piani tangenti a questo cono, che in generale ponno condursi per la generatrice passante per quel punto, l'uno passa per la direttrice non doppia, mentre l'altro è il piano tangente alla superficie data nel vertice del cono.

Ogni cono di secondo grado, circoscritto ad una superficie gobba del terzo, ha un piano tangente passante per la direttrice non doppia di questa.

*) *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Band 58, pag. 138. [Queste Opere, n. 24].

La superficie generata da una retta mobile, la quale si appoggi a due rette date, e si trovi ad ogni istante in un piano tangente di un dato cono di secondo grado, un piano tangente del quale passi per una di quelle due rette, è del terzo grado.

La retta doppia di una superficie gobba di terzo grado incontra nella stessa coppia di punti (reali o immaginari), cioè nei punti cuspidali, tutti i cono di secondo grado circoscritti alla superficie. I piani tangenti ai cono in quei punti passano per le due generatrici che s'appoggiano alla retta doppia nei punti medesimi.

Dati due fasci proiettivi, l'uno di piani tangenti ad un cono di secondo grado, l'altro di piani passanti per una retta, le rette intersezioni de' piani corrispondenti formano una superficie del terzo grado (per la quale la retta data è la direttrice doppia).

12. Considero una generatrice G appoggiata alla retta doppia D nel punto g . Se intorno a quella generatrice si fa rotare un piano, esso sega la superficie Σ secondo una conica che passa costantemente pel punto g , ed ivi tocca un piano fisso, cioè quel piano DG' che passa per la direttrice doppia, e per quella generatrice G' che appoggiasi pure in g alla retta D . Il polo della retta G rispetto a quella conica si troverà dunque nel piano DG' . Ma siccome la generatrice G incontra anche l'altra direttrice E , così, se per questa s'immaginano condotti i piani tangenti alla conica, il piano EG ed inoltre il piano EF conjugato armonico di quest'ultimo rispetto ai due primi, è evidente che il piano EF deve pure passare per quel polo. Ora, i piani DG' , EF sono fissi, cioè non variano, comunque ruoti intorno a G il piano della conica; dunque, variando questo piano, il polo di G rispetto alla conica variabile percorre la retta Γ comune ai piani DG' , EF . Ossia:

I poli di una stessa generatrice di una superficie gobba del terzo grado, relativi a tutte le coniche in essa inscritte e poste in piani passanti per quella generatrice, sono in una retta appoggiata alle due direttrici della superficie medesima.

Variando la generatrice G , varia la corrispondente retta Γ , che però rimane sempre appoggiata alle D , E ; onde segue, che il luogo della retta Γ , è un'altra superficie gobba del terzo grado, che ha le rette direttrici in comune colla data: superficie, che è evidentemente polare reciproca della proposta Σ . Ossia:

Il luogo dei poli delle generatrici di una superficie gobba del terzo grado, rispetto alle coniche inscritte in questa e poste in piani rispettivamente passanti per le generatrici medesime, è un'altra superficie gobba del terzo grado, polare reciproca della data.

Da quanto precede segue inoltre:

Se intorno ad una retta fissa si fa girare un piano, e in questo si descriva una conica toccante un piano fisso nel punto in cui esso è incontrato da quella retta; se nel movimento del piano, la conica si deforma appoggiandosi costantemente ad una seconda

retta fissa, e in modo che il polo della prima retta rispetto alla conica scorra su d'una terza retta data nel piano fisso; la conica genererà una superficie gobba del terzo grado, per la quale le prime due rette date sono generatrici, mentre la retta che unisce i loro punti d'incontro col piano fisso è la retta doppia.

13. Ecco i teoremi correlativi:

I piani polari di una stessa generatrice di una superficie gobba del terzo grado, rispetto a tutt' i coni di secondo grado circoscritti a questa ed aventi i vertici in quella generatrice, passano per una retta appoggiata alle due direttrici della superficie gobba. Il luogo delle rette analoghe a questa, e corrispondenti alle diverse generatrici, è un'altra superficie gobba del terzo grado, polare reciproca della data (la stessa del numero precedente).

Se un cono di secondo grado, mobile, percorre col vertice una retta fissa, e passa per un punto fisso, nel quale sia toccato da un piano passante per quella retta; se inoltre il cono ha costantemente un piano tangente, passante per una seconda retta fissa, e se il piano polare della prima retta, rispetto al cono, ruota intorno ad una terza retta data, passante pel punto fisso; l'involuppo di quel cono sarà una superficie gobba del terzo grado, per la quale le prime due rette date sono generatrici, mentre la retta intersezione de' piani da esse determinati col punto fisso è la direttrice non doppia.

14. Supponiamo che una superficie gobba Σ di terzo grado sia individuata per mezzo delle due direttrici e di cinque generatrici. Condotta un piano per una di queste, esso sarà un piano tangente della superficie. Si domanda il punto di contatto.

Questo piano segnerà la retta doppia in un punto g , situato sulla generatrice per cui passa, e segnerà le altre generatrici ne' punti h, k, l, m . La conica, intersezione della superficie col piano tangente, è determinata dai cinque punti g, h, k, l, m ; e si tratta di trovare il punto in cui la generatrice G passante per g la sega di nuovo. A tale intento, basta ricorrere al teorema di PASCAL. Le rette G, lm concorrono in un punto p ; le hg, km in q ; la pq incontra hl in r ; la rk segnerà G nel punto cercato.

Sia invece dato un punto sopra una delle cinque generatrici, e si domandi il piano che ivi tocca la superficie. Quel punto determina colla direttrice non doppia un piano α , passante per la generatrice G , di cui si tratta, e colle altre quattro generatrici altrettanti piani $\beta, \gamma, \delta, \epsilon$. Questi cinque piani determinano il cono di secondo grado, circoscritto alla superficie Σ , ed avente il vertice nel punto dato. Si tratta dunque di trovare il secondo piano tangente a questo cono, passante per quella generatrice G per cui passa già α . Le rette $G, \delta\epsilon$ determinano un piano μ ; le $\beta\alpha, \gamma\epsilon$ un altro piano ν ; le $\beta\delta, \mu\nu$ un terzo piano π ; le rette $\pi\gamma, G$ individueranno il piano desiderato.

Un piano qualsivoglia dato sega le sette rette, mediante le quali è individuata la superficie Σ , in altrettanti punti appartenenti alla curva di terz'ordine, secondo la quale

il piano sega la superficie. Fra quei punti, quello che spetta alla direttrice doppia, è il punto doppio della sezione. Ora una curva del terz'ordine con punto doppio è completamente determinata da questo e da sei punti ordinarij, e si sa costruirla colle intersezioni di due fasci proiettivi, l'uno di rette e l'altro di coniche *).

Colla costruzione correlativa si otterrà il cono circoscritto alla superficie Σ , ed avente il vertice in un punto dato arbitrariamente nello spazio.

15. Considero ancora un piano che, passando per la generatrice G seghi la superficie Σ in una conica, ed immagino il cono avente per base questa conica ed il vertice in un punto o , preso ad arbitrio sulla retta doppia D . Questo cono ha evidentemente per generatrici la retta D e quelle due generatrici di Σ che passano per o ; inoltre lo stesso cono è toccato lungo D dal piano DG' , ove G' sia la generatrice di Σ che incontra la retta doppia insieme con G .

È pure evidente che, comunque ruoti quel piano intorno a G , epperò varii il cono per mezzo del quale vedesi dal punto fisso o la conica, sezione della superficie Σ , quelle tre generatrici e quel piano tangente restano invariabili; onde si ha un fascio di coni aventi in comune tre generatrici ed il piano tangente lungo una di queste. Siccome poi, ad ogni piano condotto per G corrisponde un determinato cono nel fascio, e reciprocamente, così i coni anzidetti ed i piani per G si corrispondono anarmonicamente, cioè formano due sistemi proiettivi. Dunque:

I piani tangenti di una superficie gobba del terzo grado, passanti per una stessa generatrice, ed i coni per mezzo de' quali si veggono da un punto fissato ad arbitrio sulla retta doppia le coniche inscritte nella superficie e poste in quei piani, formano due fasci proiettivi.

Osserviamo che quando il piano mobile intorno a G passa per D , la conica degenera nel sistema di due rette coincidenti colla stessa D ; epperò il corrispondente cono è il sistema dei due piani che toccano la superficie Σ nel punto o . Questa osservazione gioverà per ciò che segue. { Anche al piano GE corrisponde un cono riducendosi a due piani: il piano DG' ed il piano delle due generatrici per o , cioè il piano oE . }

16. Sian dati due fasci proiettivi, l'uno di piani passanti per una data retta G , l'altro di coni di secondo grado passanti per tre date generatrici O, O' (queste due reali o immaginarie) e D , e toccanti lungo quest'ultima un piano dato. Supponiamo inoltre che le rette D, G siano in uno stesso piano, al quale corrisponda, nel secondo fascio, il sistema de' due piani DO, DO' . Di qual natura è la superficie luogo delle coniche intersezioni dei piani del primo fascio coi coni corrispondenti del secondo?

*) JONQUIÈRES, *Mélanges*, etc., pag. 190.

Una retta arbitraria incontra il fascio di coni in una doppia serie di punti in involuzione, ed il fascio di piani in una semplice serie di punti, proiettiva alla prima. Le due serie hanno in generale tre punti doppi, epperò la superficie richiesta è del terz'ordine. È evidente che essa conterrà le quattro rette date. Inoltre, siccome il piano DG sega il cono corrispondente, cioè il sistema de' piani DO, DO' secondo una conica che riducesi al sistema di due rette coincidenti (DD), così la retta D è doppia sulla superficie, e per conseguenza questa è gobba.

17. Il principio di dualità somministra poi queste altre proprietà:

I punti di una generatrice di una superficie gobba del terzo grado, considerati come vertici d'altrettanti coni di secondo grado circoscritti a questa, e le coniche intersezioni di questi con con uno stesso piano condotto ad arbitrio per la direttrice non doppia, formano due sistemi proiettivi.

Sian dati due sistemi proiettivi, l'uno di punti sopra una retta G, l'altro di coniche tangenti due rette date O, O' (reali o no), ed un'altra retta data E in un punto dato. Supponiamo inoltre che le rette E, G siano concorrenti in un punto, al quale corrisponda, nel secondo sistema, il complesso de' due punti EO, EO' (risguardato come un involuppo di seconda classe). La superficie involupata dai con che passano per quelle coniche ed hanno i vertici ne' corrispondenti punti di G, è gobba e del terzo grado; per essa la retta E è la direttrice non doppia, e G, O, O' sono tre generatrici.

Dalle cose che precedono, consegue che:

Una superficie gobba del terzo grado è individuata dalla retta doppia, da tre punti, e da tre generatrici, due delle quali (reali o immaginarie) si appoggino alla retta doppia in uno stesso punto.

Una superficie gobba del terzo grado è individuata dalla retta doppia e da nove punti.

Una superficie gobba del terzo grado è individuata dalla direttrice non doppia, da tre piani tangenti e da tre generatrici, due delle quali (reali o no) siano in uno stesso piano colla direttrice.

Una superficie gobba del terzo grado è individuata dalla direttrice non doppia e da nove piani tangenti.

Ecc. ecc.

18. Dato un punto qualunque o nello spazio, la sua prima superficie polare, rispetto alla superficie Σ , è, per la nota teoria delle curve e delle superficie polari, del second'ordine. Se per o conduciamo un piano π arbitrario, esso sega la superficie Σ secondo una linea del terzo ordine, che ha un punto doppio nell'intersezione del piano π colla retta doppia D. Lo stesso piano π segnerà la superficie prima polare di o secondo

una conica, la quale è la polare di o rispetto all'anzidetta linea del terz'ordine. Ma è d'altronde noto, che quando una linea del terz'ordine ha un punto doppio, tutte le prime polari passano per esso; dunque:

*La prima superficie polare di un punto arbitrario rispetto ad una superficie gobba del terzo grado è un iperboloide passante per la retta doppia *).*

Se quel piano secante π si facesse passare per uno de' due punti cuspidali della retta doppia, la sezione avrebbe ivi un punto doppio con due tangenti coincidenti, cioè una cuspidale o regresso; epperò, siccome è noto che una linea del terz'ordine, avente una cuspidale, è ivi toccata da tutte le coniche prime polari, così:

*I piani che toccano una superficie gobba del terzo grado ne' punti cuspidali della retta doppia, sono tangenti nei medesimi punti all' iperboloide polare di un punto arbitrario **).*

Se immaginiamo ancora il piano secante π , come sopra, è noto ***) che la retta tirata da o al punto doppio della linea di terz'ordine e la tangente in questo punto alla conica polare, sono conjugate armoniche rispetto alle due tangenti della linea di terz'ordine nel punto stesso; dunque:

In un punto qualunque della retta doppia di una superficie gobba del terzo grado, l'angolo de' due piani tangenti a questa superficie è diviso armonicamente dal piano che ivi tocca l' iperboloide polare e dal piano condotto al polo †).

Il piano oD condotto dalla retta doppia al polo, toccherà esso pure l' iperboloide polare in un punto o' (della retta D); epperò, in virtù del precedente teorema, nel punto o' il piano tangente all' iperboloide è uno dei piani che nel punto stesso toccano la superficie Σ . Per trovare il punto o' , si conduca il piano oD che seghi la seconda direttrice E nel punto o'' ; il piano tangente alla superficie Σ in o'' , segnerà evidentemente la retta doppia nel punto desiderato.

*) {La prima polare di un punto arbitrario rispetto ad una superficie gobba d'ordine qualunque passa per la curva doppia di questa superficie.}

**) {I piani che toccano una superficie gobba qualunque nei punti cuspidali della curva doppia sono tangenti nei medesimi punti alla prima polare di un punto arbitrario.}

***) Veggasi l'eccellente trattato *On the higher plane curves* dell' illustre geometra irlandese GIORGIO SALMON (Dublin, 1852, pag. 61).

†) {In un punto qualunque m della curva doppia di una superficie gobba d'ordine n (ha luogo la stessa proprietà per una superficie qualunque che abbia un punto biplanare m) l'angolo di due piani tangenti a questa superficie è diviso armonicamente dal piano che ivi tocca la prima polare di un punto arbitrario o e dal piano condotto al polo o (per la retta tangente in m alla curva doppia). Ne segue che la superficie data e la prima polare di o si toccheranno (oltre ai punti cuspidali) in quei punti della curva doppia dove la prima polare è toccata da piani passanti per o , cioè ne' punti ove la curva doppia è incontrata dalla seconda polare di o .}

19. Immaginiamo il piano oE , condotto pel polo e per la direttrice non doppia; esso sega la superficie Σ secondo il sistema di tre rette, cioè la direttrice E e due generatrici, le quali incontrino E in due punti u, v , e siano appoggiate alla retta doppia nel punto w . La conica polare di o , rispetto al triangolo uvw , è circoscritta al triangolo stesso, com'è notissimo; epperò i punti u, v sono quelli ne' quali la retta E è incontrata dall'iperboloide polare. Ma i punti u, v sono anche quelli in cui il piano oE tocca la superficie Σ , cioè sono due punti conjugati di quell'involuzione che le generatrici della superficie del terzo grado formano sulla direttrice E ; dunque:

La direttrice non doppia di una superficie gobba del terzo grado è divisa armonicamente dai piani tangenti ne' punti cuspidali e dall'iperboloide polare di un punto arbitrario.

E per conseguenza:

La direttrice non doppia di una superficie gobba del terzo grado è tangente all'iperboloide polare di un punto qualunque, preso in uno dei due piani che passano per la direttrice medesima e per uno de' punti cuspidali.

Viceversa, perchè un iperboloide passante per la retta doppia, e tangente ne' punti cuspidali alla superficie Σ , possa essere la superficie polare di alcun punto nello spazio, basta ch'esso passi per una coppia di punti conjugati dell'involuzione esistente sulla retta E .

20. Vediamo ora come si possa costruire l'iperboloide polare di un dato punto o . La retta che partendo da o si appoggia alle direttrici D, E della superficie Σ , incontrerà, oltre D , un'altra generatrice, dello stesso sistema, dell'iperboloide. Per trovare questa generatrice, considero le generatrici A, B passanti pei punti cuspidali (vedi il n.° 5). Sia ρ il piano conjugato armonico del piano o (AD) (BE) *) rispetto ai due AD, BE , e sia ρ' il coniugato di AD rispetto ai due ρ, BE . È facile vedere che il piano ρ' passa per la generatrice desiderata. Analogamente si trova un piano σ' passante per la retta intersezione de' piani AE, BD ; e la generatrice richiesta è la retta secondo cui si segano i piani ρ', σ' .

Ciò posto, l'iperboloide polare si può generare mediante l'intersezione de' piani corrispondenti di due fasci omografici, gli assi de' quali siano le rette D e $\rho'\sigma'$; ponendo come corrispondenti i piani AD e σ' ; BD e ρ' ; oD ed $o'(\rho'\sigma')$.

La precedente costruzione mostra, che se il polo o si trova nel piano AD , l'iperboloide degenera in un cono di secondo grado col vertice in a ; e se o si trova nel piano BD , l'iperboloide diviene un cono col vertice in b ; dunque:

I piani che toccano una superficie gobba del terzo grado ne' suoi punti cuspidali,

*) Cioè il piano passante per o e per la retta intersezione dei piani AD, BE .

sono il luogo de' punti le cui prime superficie polari siano conì di secondo grado. I vertici di questi conì sono gli stessi punti cuspidali *).

21. Abbiamo già veduto (n.º 6) come si può generare la superficie gobba del terzo grado mediante l'intersezione de' piani corrispondenti di due fasci proiettivi, l'uno semplice intorno ad E, l'altro doppio involutorio intorno a D. Quindi il luogo delle intersezioni de' piani corrispondenti de' tre fasci, i cui assi sono le rette D, E, $\rho'\sigma'$, sarà la curva di quart'ordine **), secondo la quale si segano la superficie Σ e l'iperboloide polare. Ma possiamo considerare la cosa più generalmente, come segue.

Sian dati tre fasci proiettivi di piani, l'uno semplice intorno all'asse E; il secondo doppio involutorio intorno all'asse D; il terzo omografico al secondo e coll'asse C. Quale è la curva luogo delle intersezioni de' piani corrispondenti? Un piano qualsivoglia sega i tre fasci di piani secondo altrettanti fasci di rette, de' quali il primo ed il secondo generano, colle mutue intersezioni de' raggi omologhi, una curva del terz'ordine con un punto doppio (l'intersezione di D); mentre il secondo ed il terzo fascio generano una conica passante pei loro centri, epperò pel punto doppio della prima curva. Le due curve, avendo in comune un punto che è doppio per l'una di esse, si segheranno generalmente in altri quattro punti; dunque la curva generata dai tre fasci di piani è del quart'ordine, poichè un piano qualunque la sega in quattro punti.

I piani del secondo e del terzo fascio determinano sulla retta E due divisioni omografiche, che in generale ammettono due punti doppi; dunque la curva in questione si appoggia alla retta E in due punti.

Invece i piani del primo e del terzo fascio determinano sulla retta D due serie proiettive, l'una semplice e l'altra doppia involutoria; tali serie hanno tre punti doppi, i quali sono quelli in cui la curva si appoggia all'asse D. Così pure la curva medesima si appoggia in tre punti sulla retta C.

Il primo e il secondo fascio generano una superficie gobba del terzo grado, mentre il secondo e il terzo fascio generano un iperboloide; D è la retta doppia della prima superficie, ed è anche una generatrice della seconda. La curva di cui si tratta è l'intersezione delle due superficie, astrazion fatta dalla retta D. Ora, ogni generatrice

*) {Se il polo o è preso nel piano A che tocca una superficie gobba qualunque in un punto cuspidale a della curva doppia, o sarà un punto doppio della quadrica polare (A^2) di a ; dunque a sarà un punto doppio della prima polare di o . Cioè ogni punto del piano A ha la prima polare dotata di un punto doppio in a . Ne segue che i piani tangenti alla superficie gobba fondamentale ne' punti cuspidali fanno parte della Steineriana.}

**) Dico del quart'ordine, perchè le due superficie hanno già in comune una retta che è doppia per l'una di esse.

dell'iperboloide, del sistema a cui appartiene D , incontra la superficie del terzo grado, epperò anche la curva di quart'ordine, *in tre punti*. Invece, ogni generatrice dell'iperboloide, dell'altro sistema, essendo appoggiata alla retta doppia, incontra la superficie del terzo grado, e quindi la curva di quart'ordine, *in un solo punto*. Questa proprietà basta per mostrare quanto questa curva sia diversa dalla curva, dello stesso ordine, intersezione di due superficie del secondo. Dunque:

Il luogo delle intersezioni dei piani corrispondenti di tre fasci proiettivi, il primo semplice di piani passanti per una stessa retta, il secondo doppio involutorio di piani passanti per un'altra retta, il terzo, omografico al secondo, di piani passanti per una terza retta data, è una curva del quart'ordine, per la quale passa un'unica superficie del second'ordine, l'iperboloide, cioè, generato dall'intersezione degli ultimi due fasci. Ciascuna generatrice dell'iperboloide, del sistema a cui appartengono la seconda e la terza retta data, incontra quella curva in tre punti, mentre ogni generatrice dell'altro sistema non l'incontra che in un solo punto.

Ciascuno riconoscerà qui le proprietà di quella curva che l'illustre STEINER *) trovò come intersezione di una superficie (non rigata) del terz'ordine con un iperboloide passante per due rette situate in quella superficie, ma non nello stesso piano. Benchè nel teorema superiore, la superficie del terz'ordine non sia qualunque, ma rigata, e l'iperboloide abbia con essa in comune, non due rette distinte, ma la retta doppia, tuttavia la curva da me incontrata è generale quanto quella del sommo geometra alemanno. In altra occasione mi propongo di dimostrare questa proprietà, ed anche che, data una curva di tale natura, epperò dato l'iperboloide che passa per essa, ogni generatrice dell'iperboloide, appoggiata alla curva in tre punti, può essere presa come retta doppia di una superficie gobba del terzo grado, passante per la curva, ed avente per seconda direttrice la retta congiungente due punti dati della curva medesima. Intanto proporrei che a questa si desse la denominazione di *curva gobba del quart'ordine e di seconda specie*.

22. Ritornando all'iperboloide polare del punto o , rispetto alla superficie Σ , cerchiamo quali siano i tre punti in cui la curva intersezione delle attuali due superficie, si appoggia alla retta doppia D . Essi sono i punti doppi delle due serie proiettive determinate su questa retta dai fasci che hanno per assi le rette E e $\rho'\sigma'$. Ma in questi fasci si corrispondono i piani AE e σ' ; BE e ρ' ; $o'E$ ed $o'(\rho'\sigma')$. Dunque:

L'iperboloide polare di un punto qualunque, rispetto ad una superficie gobba del terzo grado, sega questa secondo una curva del quart'ordine e di seconda specie, che passa

*) *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Band 53.

pei tre punti della retta doppia, ove le due superficie si toccano (cioè ne' punti a, b, o' *).

23. La seconda superficie polare del punto o è il piano polare di o relativo all'iperboloide polare. È assai facile la costruzione di quel piano. Siccome un piano è determinato da tre punti, così se da o si tirano tre trasversali, ciascuna segante la superficie Σ in tre punti, il piano cercato sarà il piano polare del punto o rispetto al triedro formato da tre piani condotti per quelle intersezioni (in modo però che ogni piano contenga un punto di ciascuna trasversale). Il modo più semplice di ottenere un tale triedro è quello di prendere i piani $o'E, uD, vD$, ove u, v sono i punti considerati al n.º 19. È ben noto come si costruisce il piano polare di un punto rispetto ad un triedro. Il vertice del triedro anzidetto è il punto o' , epperò il piano polare di o passerà per o' , cioè:

Il piano polare di un punto dato, rispetto ad una superficie gobba del terzo grado, incontra la retta doppia nel punto in cui questa superficie è toccata da un piano passante pel polo.

Siccome il punto o' appartiene alla curva di quart'ordine, intersezione della superficie Σ coll'iperboloide polare di o , così il piano polare incontrerà questa curva in altri tre punti r, s, t (de' quali uno solo è reale quando i punti u, v sono reali; ed invece tutti sono reali quando questi ultimi sono immaginarj).

24. Se il polo o appartiene alla superficie Σ , l'iperboloide polare contiene la generatrice corrispondente, epperò la curva d'intersezione si decompone nel sistema di questa generatrice e di una cubica gobba (linea del terz'ordine a doppia curvatura). Dunque:

Il sistema formato da una cubica gobba e da una retta appoggiata ad essa in un punto, è un caso particolare della curva di quart'ordine e seconda specie.

Se il polo o cade sulla direttrice E , la curva d'intersezione dell'iperboloide polare colla superficie Σ si decompone in quattro rette, cioè la generatrice passante per o , la direttrice E e le generatrici passanti pei punti cuspidali.

Finalmente, se o appartiene alla retta doppia, l'iperboloide polare si decompone in due piani, cioè ne' piani che in quel punto toccano la superficie Σ .

25. Dalla teoria generale delle curve e delle superficie, risulta che la curva gobba del quart'ordine, intersezione della superficie Σ coll'iperboloide polare di un punto o ,

*) { Se una superficie gobba d'ordine n ha una curva doppia d'ordine b , la curva di contatto col cono circoscritto di vertice o è dell'ordine $n(n-1)-2b$ ed incontra la curva doppia ne' punti ove la superficie data è toccata dalla 1.^a polare di o , cioè nei punti cuspidali e nei punti situati nella 2.^a polare. Se la superficie data è di genere 0, si ha $b = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$; il numero de' punti cuspidali è allora $2(n-2)$, quello degli altri punti $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)^2$ e l'ordine della curva di contatto $2(n-1)$. }

è anche il luogo dei punti di contatto de' piani che ponno condursi da o a toccare Σ , cioè è la curva di contatto fra questa superficie e il cono ad essa circoscritto col vertice in o . Questo cono è della terza classe, poichè la classe del cono involvente è la stessa della superficie inscritta. Le generatrici cuspidali sono quelle che vanno ai punti r, s, t (n.º 23). Il piano oE tocca il cono lungo le due rette ou, ov (n.º 19); epperò il cono medesimo, avendo un piano tangente doppio, è del quart'ordine.

26. Ometto per brevità di riportare qui i teoremi correlativi. In questi, alla curva di quart'ordine e seconda specie corrisponde una superficie sviluppabile della quarta classe, essenzialmente distinta da quella della stessa classe, sola conosciuta finora, che è formata dai piani tangenti comuni a due superficie del second'ordine. Tale superficie sviluppabile, che tocca la superficie gobba del terzo grado lungo la curva intersezione fatta da un piano arbitrario, è circoscritta ad un'unica superficie del second'ordine (un iperboloide). Per ogni generatrice di uno stesso sistema di questo iperboloide passano tre piani tangenti della sviluppabile, mentre per ogni generatrice dell'altro sistema passa un solo piano tangente.

La sviluppabile medesima può essere con tutta generalità definita come l'involuppo de' piani tangenti comuni ad una superficie gobba del terzo grado, e ad un iperboloide passante per la direttrice non doppia di quella. Per conseguenza, ecco come può costruirsi tale involuppo:

Date tre serie proiettive di punti, sopra tre rette situate comunque nello spazio; la prima serie semplice, la seconda doppia involutoria, la terza omografica alla seconda; i piani determinati dalle terne di punti corrispondenti, involuppano la sviluppabile richiesta.

NOTA

Si consideri una superficie gobba del terzo grado, come il luogo di una retta che si muova appoggiandosi ad una conica e a due rette D, E , la prima delle quali abbia un punto comune colla conica (vedi il n.º 9). Sia $x=0$ l'equazione del piano che passa per la retta D e per la traccia di E sul piano della conica, $y=0$ il piano che passa per E e per la traccia di D sul piano della conica medesima; $z=0$ il piano che passa per E e pel polo, relativo alla conica, della retta congiungente le traccie di D, E ; $w=0$ il piano passante per D e tangente alla conica. Allora l'equazione della superficie può scriversi:

$$y(x^2 + kw^2) - xzw = 0,$$

ove k è una costante, dal segno della quale dipende l'essere reali o immaginari i punti cuspidali. Ciò dà luogo a due generi, essenzialmente distinti, di superficie gobbe del terzo grado.

Quando i punti cuspidali sono reali, si può, mediante un'ovvia trasformazione di coordinate, ridurre l'equazione della superficie alla forma semplicissima:

$$x^2z - w^2y = 0,$$

ove $x=0$, $w=0$ sono i piani tangenti ne' punti cuspidali, ed $y=0$, $z=0$ sono i piani tangenti lungo le generatrici appoggiate alla retta doppia ne' punti cuspidali.

L'Hessiano della forma $x^2z - w^2y$ è, astrazione fatta da un coefficiente numerico, x^2w^2 ; da cui concludiamo che, onde una funzione omogenea cubica con quattro variabili, eguagliata a zero, rappresenti una superficie gobba, è necessario (sufficiente?) che il suo Hessiano sia il quadrato perfetto di una forma quadratica, decomponibile in due fattori lineari. Secondo che i fattori lineari di questa forma quadratica siano reali o no, la superficie ha due punti cuspidali reali, o non ne ha. E gli stessi fattori lineari, ove sian reali, eguagliati separatamente a zero, rappresentano i piani tangenti alla superficie nei punti cuspidali.

Il signor STEINER, nella sua Memoria già citata *sulle superficie del terz'ordine* ha enunciato una serie di mirabili teoremi connessi con una certa superficie del quart'ordine, ch'ei chiama *superficie nucleo* (*Kernfläche*), e che è il luogo de' punti dello spazio, pei quali la prima superficie polare, rispetto ad una data superficie qualsivoglia del terz'ordine, è un cono di secondo grado.

L'abilissimo analista, signor CLEBSCH, professore a Carlsruhe, ha osservato *) che l'equazione della superficie nucleo non è altro che l'Hessiano dell'equazione della superficie data. Egli ha dimostrato analiticamente parecchi teoremi dello Steiner, ne ha trovati altri nuovi ed elegantissimi, e ne ha ricavato l'importante riduzione di una forma omogenea cubica con quattro variabili alla somma di cinque cubi.

La maggior parte però di questi bei teoremi perde significato nell'applicazione alle superficie gobbe. Qui mi limito ad osservare, che per queste la superficie nucleo si riduce al sistema de' due piani che toccano la superficie data ne' punti cuspidali (vedi il n.° 20).

Da ultimo noterò che la condizione a cui devono soddisfare i parametri del piano

$$rx + sy + tz + uv = 0$$

perchè sia tangente alla superficie

$$x^2z - w^2y = 0,$$

è:

$$r^2t + u^2s = 0;$$

*) *Journal für die reine und ang. Mathematik*, Band 58.

epperò l'equazione:

$$x^2z + w^2y = 0$$

rappresenta la polare reciproca della data, rispetto alla superficie:

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 0.$$

Le superficie

$$x^2z - w^2y = 0, \quad x^2z + w^2y = 0$$

sono inoltre fra loro connesse dalle proprietà esposte nei numeri 12 e 13.

Bologna, 1.º febbrajo 1861.

Aggiunta del 9 maggio 1861. Dopo la presentazione di questo scritto, è venuto a mia conoscenza che, prima ancora dello STEINER, la curva di quart'ordine e seconda specie fu considerata dal signor SALMON nella sua Memoria *On the classification of curves of double curvature* (*Cambridge and Dublin Math. Journal*, vol. V, 1850).

L. C.
