34.

SUR UN PROBLÈME D'HOMOGRAPHIE (QUESTION 296).

Nouvelles Annales de Mathématiques, 1.re série, tome XX (1861), pp. 452-456.

On donne dans le même plan deux systèmes de sept points chacun et qui se correspondent. Faire passer par chacun de ces systèmes un faisceau de sept rayons, de telle sorte que les deux faisceaux soient homographiques. Démontrer qu'il n'y a que trois solutions.

C'est une question énoncée par M. CHASLES dans le t. XIV, p. 50. MM. ABADIE (t. XIV, p. 142), POUDRA (t. XV, p. 58) et DE JONQUIÈRES (t. XVII, p. 399) ont démontré que les sept points donnés de chaque système, pris six à six, fournissent une cubique (courbe plane du troisième ordre) passant par les six points choisis, comme lieu du sommet du faisceau, dont les rayons doivent contenir ces mêmes points. Deux de ces cubiques ont en commun cinq points donnés à priori; parmi les autres *quatre* intersections, il faut trouver les *trois* points qui satisfont à la question proposée. M. DE JONQUIÈRES a démontré que ces *quatre* intersections n'appartiennent pas toutes les quatre à une troisième cubique, et par conséquent le problème n'admet pas quatre solutions, comme on pourrait le croire au premier abord. Je me propose ici de déterminer directement, parmi les quatre points d'intersection, celui qui est étranger à la question.

Soient (a, b, c, d, e, f, g), $(a', b', c', d', e', f', g')$ les deux systèmes de sept points. Rapportons le premier système au triangle abc; soient x, y, z les coordonnées trilinéaires d'un point quelconque m, et que les points donnés soient déterminés par les équations suivantes:

(a) $\qquad y=0\,,\qquad z=0\,,$

(b) $\qquad z=0\,,\qquad x=0\,,$

(c) $\qquad x=0\,,\qquad y=0\,,$

(d) $\qquad x=y=z\,,$

$$(e) \qquad x : y : z = \alpha : \beta : \gamma\,,$$
$$(f) \qquad x : y : z = \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1\,,$$
$$(g) \qquad x : y : z = \alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2\,.$$

De même en rapportant le second système au triangle $a'b'c'$, soient x', y', z' les coordonnées d'un point quelconque m', et que les points donnés soient exprimés par:

$$(a') \qquad y'=0\,, \qquad z'=0\,,$$
$$(b') \qquad z'=0\,, \qquad x'=0\,,$$
$$(c') \qquad x'=0\,, \qquad y'=0\,,$$
$$(d') \qquad x'=y'=z'\,,$$
$$(e') \qquad x' : y' : z' = \alpha' : \beta' : \gamma'\,,$$
$$(f') \qquad x' : y' : z' = \alpha'_1 : \beta'_1 : \gamma'_1\,,$$
$$(g') \qquad x' : y' : z' = \alpha'_2 : \beta'_2 : \gamma'_2\,.$$

Les rapports anharmoniques des deux faisceaux de quatre rayons $m(a, b, c, e,)$, $m'(a', b', c', e')$ sont:

$$\frac{x(\beta z-\gamma y)}{y(\alpha z-\gamma x)}\,, \quad \frac{x'(\beta' z'-\gamma' y')}{y'(\alpha' z'-\gamma' x')}\,;$$

donc, en égalant ces rapports, on aura l'équation:

$$\alpha'(\beta z-\gamma y)\frac{x}{x'}+\beta'(\gamma x-\alpha z)\frac{y}{y'}+\gamma'(\alpha y-\beta x)\frac{z}{z'}=0\,.$$

De même l'égalité des rapports anharmoniques des faisceaux $m(a, b, c, f)$, $m'(a', b', c', f')$ exige que l'on ait:

$$\alpha'_1(\beta_1 z-\gamma_1 y)\frac{x}{x'}+\beta'_1(\gamma_1 x-\alpha_1 z)\frac{y}{y'}+\gamma'_1(\alpha_1 y-\beta_1 x)\frac{z}{z'}=0\,,$$

et les faisceaux $m(a, b, c, d)$, $m'(a', b', c', d')$ donnent:

$$(z-y)\frac{x}{x'}+(x-z)\frac{y}{y'}+(y-x)\frac{z}{z'}=0\,.$$

En éliminant x', y', z' de ces trois équations, nous aurons l'équation:

$$\begin{vmatrix} \alpha'(\beta z-\gamma y) & \beta'(\gamma x-\alpha z) & \gamma'(\alpha y-\beta x) \\ \alpha'_1(\beta_1 z-\gamma_1 y) & \beta'_1(\gamma_1 x-\alpha_1 z) & \gamma'_1(\alpha_1 y-\beta_1 x) \\ z-y & x-z & y-x \end{vmatrix}=0\,,$$

qui représente une cubique G lieu d'un point m tel, que le faisceau de six rayons $m\,(a, b, c, d, e, f)$ soit homographique au faisceau analogue $m'\,(a', b', c', d', e', f')$. On voit intuitivement que cette courbe passe par les points a, b, c, d, e, f.

De même les points a, b, c, d, e, g, donnent la cubique F:

$$\begin{vmatrix} \alpha'(\beta z - \gamma y) & \beta'(\gamma x - \alpha z) & \gamma'(\alpha y - \beta x) \\ \alpha'_2(\beta_2 z - \gamma_2 y) & \beta'_2(\gamma_2 x - \alpha_2 z) & \gamma'_2(\alpha_2 y - \beta_2 x) \\ z - y & x - z & y - x \end{vmatrix} = 0,$$

et les points a, b, c, d, f, g, donnent la cubique E:

$$\begin{vmatrix} \alpha'_1(\beta_1 z - \gamma_1 y) & \beta'_1(\gamma_1 x - \alpha_1 z) & \gamma'_1(\alpha_1 y - \beta_1 x) \\ \alpha'_2(\beta_2 z - \gamma_2 y) & \beta'_2(\gamma_2 x - \alpha_2 z) & \gamma'_2(\alpha_2 y - \beta_2 x) \\ z - y & x - z & y - x \end{vmatrix} = 0.$$

Les cubiques G, F ont, outre a, b, c, d, e, quatre points communs; un de ces points n'appartient pas à la cubique E. On obtient ce point en observant que les équations des courbes G, F sont *visiblement* satisfaites par:

$$\frac{\alpha'(\beta z - \gamma y)}{z - y} = \frac{\beta'(\gamma x - \alpha z)}{x - z} = \frac{\gamma'(\alpha y - \beta x)}{y - x},$$

c'est-à-dire:

$$x : y : z = \frac{\beta' - \gamma'}{\beta\gamma' - \beta'\gamma} : \frac{\gamma' - \alpha'}{\gamma\alpha' - \gamma'\alpha} : \frac{\alpha' - \beta'}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}.$$

Voilà la construction graphique de ce point que je désigne par o.

Considérons les deux systèmes de cinq points (a, b, c, d, e) et (a', b', c', d', e') dont le point o dépend exclusivement, et transformons homographiquement le second système, de manière que quatre parmi les cinq points a', b', c', d', e' aient pour correspondants les quatre points homonymes du premier système. Ainsi en omettant successivement les points a', b', c', d', e', on obtiendra cinq points a_1, b_1, c_1, d_1, e_1. Les droites $aa_1, bb_1, cc_1, dd_1, ee_1$ passent toutes les cinq par le point cherché o. Par exemple, en omettant e', on a le point e_1 dont les coordonnées sont:

$$x : y : z = \alpha' : \beta' : \gamma';$$

et, si l'on omet d', on a le point d_1, représenté par:

$$x : y : z = \frac{\alpha}{\alpha'} : \frac{\beta}{\beta'} : \frac{\gamma}{\gamma'}.$$

Donc les droites dd_1, ee_1 ont les équations:

$$\alpha'(\beta\gamma'-\beta'\gamma)x+\beta'(\gamma\alpha'-\gamma'\alpha)y+\gamma'(\alpha\beta'-\alpha'\beta)z=0,$$
$$(\beta\gamma'-\beta'\gamma)x+(\gamma\alpha'-\gamma'\alpha)y+(\alpha\beta'-\alpha'\beta)z=0,$$

et l'on voit bien qu'elles sont satisfaites par les coordonnées du point o.

Des points (a,b,c,d,e), (a',b',c',d',e'), on a déduit un point o commun aux cubiques G, F; de la même manière, on peut, des points (a,b,c,d,f), (a',b',c',d',f') déduire un point commun aux cubiques G, E, etc.

En conclusion, les trois points qui seuls résolvent la question proposée sont les points communs aux trois cubiques E, F, G, autres que a,b,c,d, c'est-à-dire les intersections des cubiques F, G autres que a,b,c,d,e,o (*voir*, pour la construction de ces trois points, le *Compte rendu* du 31 décembre 1855). [3]