

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES LIGNES GAUCHES
DE TROISIÈME ORDRE ET CLASSE.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 58 (1861), pp. 138-151.

I.

1. Je suppose que l'on ait deux séries projectives de points, l'une dans une droite R, l'autre dans une conique plane C, situées d'une manière tout à fait arbitraire dans l'espace. On demande de connaître la surface lieu de la droite qui joint deux points homologues des formes projectives données.

Pour établir la *classe* de cette surface, je fais usage des considérations employées par M. SCHRÖTER dans un mémoire inséré dans ce journal (tome 54). Par un point O fixé arbitrairement sur la conique je tire des droites aux divers points de cette courbe; ainsi l'on obtiendra un faisceau de droites, perspectif à la conique. Par une droite arbitraire S menons un faisceau de plans, perspectif à la droite donnée. Les deux faisceaux étant projectifs, l'intersection des éléments homologues donnera une conique K située dans le plan de la conique donnée, et passant par le point O et par la trace de S. La conique K coupera la conique C en trois autres points, qui avec la droite S donnent lieu à trois plans; et il est bien évident que ces plans contiennent chacun une génératrice de la surface cherchée, et sont les seuls qui passent par S et qui aient cette propriété.

Donc la surface est de la troisième classe, et par conséquent du troisième ordre; car toute surface réglée (non développable) a son ordre égal à sa classe*).

Chaque plan mené par la directrice rectiligne donnée R rencontre la conique C en deux points, donc il contient deux génératrices de la surface: le lieu de l'intersection de ces deux génératrices est la *droite double* (ligne de striction) de la surface.

*) CAYLEY, Cambridge and Dublin Math. Journal. VII, p. 171.

C'est-à-dire: par chaque point de la droite double passent deux génératrices situées dans un plan passant par la directrice R. Ces génératrices déterminent deux involutions, l'une sur la droite R, l'autre sur la conique C. Les élémens doubles de ces involutions sont en même temps réels ou imaginaires; ils sont individués par les plans tangens à la conique C menés par la droite R.

Il est évident que le plan de la conique C contient une génératrice de la surface; car la trace de R sur ce plan aura son point homologue sur la conique, et la droite qui joint ces points sera une génératrice de la surface. Cette même droite rencontrera la conique dans un second point, par lequel passe la droite double.

2. Si l'on considère de nouveau les formes projectives proposées R et C, un point quelconque de la droite R et la droite tangente à la conique au point homologue déterminent un plan. Ce plan est osculateur d'une courbe à double courbure dont on demande la *classe*.

Par un point O pris arbitrairement dans l'espace et par la droite R menons un plan qui coupera le plan de la conique C suivant une droite S, et imaginons un faisceau de droites perspectif à la droite R et ayant son centre en O. Ce faisceau divisera la droite S homographiquement à la droite R. Une tangente fixe (arbitraire) T de la conique C est divisée par toutes les autres tangentes homographiquement à la droite R; donc nous aurons sur les droites S et T deux séries projectives de points. La droite qui joint deux points homologues de ces séries enveloppe une conique K qui touchera les droites S et T, et par conséquent aura trois autres tangentes communes avec la conique C. Ces trois tangentes communes avec le point O déterminent trois plans qui évidemment sont osculateurs de la courbe cherchée, et sont les seuls qui passent par O. Donc *cette courbe est de la troisième classe (et du troisième ordre*)*.

Le plan de la conique C est osculateur de la courbe nommée (*cubique gauche*) et par la droite R passent deux plans osculateurs (réels ou imaginaires) de la même courbe.

3. Réciproquement: soient données une cubique gauche, un plan osculateur et une droite R intersection de deux autres plans osculateurs (réels ou imaginaires). Le premier plan osculateur coupera la surface développable, dont la cubique est l'arête de rebroussement, suivant une conique C**). Les plans osculateurs de la cubique gauche déterminent sur la droite R et sur la conique C deux séries projectives de points. *La droite qui joint deux points homologues de ces formes engendre une surface du troisième ordre (et troisième classe), dont la droite double gît dans un plan osculateur de la cubique gauche.*

*) SCHRÖTER, Ce Journal, Tome 56, p. 27.

***) MÖBIUS, Der barycentrische Calcul, p. 120.

Si la droite R est fixe, et l'on fait varier le plan de la conique C , on obtiendra un faisceau^[28] de surfaces cubiques, dont les droites doubles formeront un hyperboloïde à une nappe, et l'on aura sur la cubique gauche une involution, dont deux éléments conjugués sont le plan variable de la conique C et le plan osculateur qui passe par la droite double correspondante.

II.

4. On donne deux formes projectives: l'une soit un faisceau de plans passant par une même droite R ; l'autre soit un faisceau de plans tangents à un même cône C du second ordre. Les éléments homologues s'entrecoupent dans une droite qui engendre une surface cubique, dont R est la droite double. Par un point quelconque de R passent deux génératrices, dont le plan tourne autour d'une droite fixe S . C'est-à-dire: chaque plan qui passe par cette droite S contient deux génératrices qui donnent lieu à une involution de plans sur le cône C et à une deuxième involution de plans par R . Les éléments doubles de ces involutions sont individués par les points où R perce C .

La droite R avec le sommet du cône C détermine un plan, qui aura son correspondant tangent à cette surface; la droite intersection de ces plans sera une génératrice de la surface. Par cette génératrice passe un autre plan tangent du cône, et ce dernier plan passe aussi par la droite S .

5. Dans les formes projectives données je considère un plan du faisceau R et la génératrice de contact du plan homologue tangent au cône C . La génératrice perce le plan en un point, dont le lieu est une cubique gauche qui passe par le sommet du cône et par les intersections de cette surface avec la droite donnée.

6. Réciproquement: je suppose maintenant que l'on ait une cubique gauche, un de ses points comme sommet d'un cône C passant par la courbe, et une droite R qui s'appuie en deux points (réels ou imaginaires) de la même cubique. Chaque point de la courbe donne lieu à un plan passant par R , et à un autre plan tangent au cône C . Ces plans forment deux systèmes projectifs. La droite intersection de deux plans homologues engendre une surface cubique, qui contient une autre directrice rectiligne S rencontrant la cubique en un seul point. Si la droite R est fixe, et l'on fait varier le sommet du cône C , on obtient un système de surfaces cubiques, et la droite S engendre un hyperboloïde à une nappe. De plus, on aura sur la cubique gauche une involution formée par les sommets des cônes et les points d'appui des droites S correspondantes.

III.

7. On a deux formes projectives: une série de points dans une droite R , et un système de droites génératrices d'un hyperboloïde H . Quelle est la courbe à double courbure osculée par le plan déterminé par deux élémens homologues des formes proposées? Fixons arbitrairement une génératrice S de l'autre système dans l'hyperboloïde; cette génératrice sera divisée par les droites du système donné homographiquement à la droite R . On a donc deux séries projectives de points sur les droites R , S ; et on sait que la droite qui joint deux points homologues engendre un hyperboloïde K passant par les droites R et S . Il est d'ailleurs évident que chaque plan individué par deux élémens homologues des formes proposées est tangent aux hyperboloïdes H et K ; donc la courbe demandée est osculée par les plans tangens communs à deux hyperboloïdes qui ont une génératrice commune (S). Donc elle est une cubique gauche qui a deux plans osculateurs passant par R . Cette courbe a en outre un plan osculateur passant par chaque génératrice de l'hyperboloïde du système donné, et deux plans osculateurs passant par chaque droite de l'autre système.

8. Soient données de nouveau deux formes projectives, dont l'une soit un faisceau de plans par une droite R , et l'autre un système de génératrices d'un hyperboloïde H . Deux élémens homologues s'entrecoupent en un point, dont on demande de connaître le lieu géométrique. Fixons une génératrice S de l'autre système; cette droite avec les génératrices du système donné donne lieu à un faisceau de plans homographique au faisceau donné. La droite intersection de deux plans homologues de ces faisceaux projectifs engendre un second hyperboloïde K , passant par R , S . On voit aisément que chaque point du lieu demandé est commun aux deux hyperboloïdes; donc ce lieu est la cubique gauche intersection de ces surfaces, qui ont déjà en commun la droite S . La cubique gauche a deux points sur R ; un point sur chacune des génératrices données, et deux points sur chacune des droites de l'autre système *).

9. Réciproquement, supposons que l'on ait une cubique gauche et un hyperboloïde touché par tous les plans osculateurs de la courbe. Par chaque génératrice de l'un système, dans l'hyperboloïde, passe un seul plan osculateur de la cubique, et par chaque génératrice de l'autre système passent deux plans osculateurs. Imaginons aussi une droite, intersection de deux plans osculateurs (réels ou imaginaires). Cette droite sera coupée par les plans osculateurs qui passent par les génératrices du second système en deux séries de points en involution. Les plans osculateurs qui passent par les génératrices du premier système forment sur cette même droite une division projective

*) CHASLES, Journal de M. LIOUVILLE, année 1857, p. 397.

au système nommé de génératrices. D'où il suit que les plans osculateurs de la cubique et les génératrices du premier système situées dans ces plans constituent deux formes projectives.

On a maintenant une cubique gauche et un hyperboloïde passant par cette courbe. L'hyperboloïde a deux systèmes de génératrices: toutes les droites de l'un système s'appuient à la courbe en un seul point, et toutes les droites de l'autre système s'appuient à la courbe en deux points. Si l'on donne aussi une droite qui soit corde (réelle ou idéale) de la cubique, elle déterminera avec les points de la courbe qui sont dans les droites du second système une involution de plans, et avec les points de la courbe qui appartiennent aux droites du premier système un faisceau de plans projectif à ce même système de génératrices. D'où il suit que les points de la courbe et les génératrices du premier système constituent deux formes projectives.

Les deux systèmes de génératrices d'un hyperboloïde qui passe par une cubique gauche, ou qui touche les plans osculateurs d'une telle courbe, se correspondent aussi projectivement entre eux^[29].

Une conique située dans la surface développable dont l'arête de rebroussement est une cubique gauche est une forme projective à la cubique. A un point quelconque de celle-ci correspond le point de la conique situé dans le plan osculateur de la cubique au point sus-dit. La droite qui joint ces points homologues est tangente à la cubique, et par conséquent elle engendre la surface développable du quatrième ordre et de la troisième classe, dont la cubique est l'arête de rebroussement.

Un cône de second ordre passant par une cubique gauche est une forme projective à celle-ci. A un point de la cubique correspond le plan tangent du cône qui passe par ce point.

10. Applications. On donne un hyperboloïde et cinq de ses points a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ; on demande de construire une cubique gauche qui passe par ces points et soit située sur la surface nommée. La courbe cherchée sera le lieu de l'intersection des éléments homologues de deux formes projectives, dont l'une soit un faisceau de plans et l'autre soit un système de génératrices de l'hyperboloïde. On peut prendre pour axe du faisceau la droite $a_4 a_5$; les plans $a_1(a_4 a_5), a_2(a_4 a_5), a_3(a_4 a_5)$ seront trois plans du faisceau. Les éléments homologues de l'autre forme seront les génératrices du premier (ou du second) système qui passent par a_1, a_2, a_3 . Alors à chaque plan passant par $a_4 a_5$ correspondra une génératrice du même système, et l'intersection de ces éléments sera un point de la cubique cherchée. Comme on est libre de prendre le système de génératrices que l'on veut, ainsi il y aura deux cubiques gauches satisfaisant à la question (proposée par M. CHASLES *).

*) Journal de M. LIOUVILLE, année 1857, p. 397.

Pour deuxième application, proposons nous de construire une cubique gauche qui s'appuie sur cinq droites données A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 [30]. Elle sera évidemment l'intersection des hyperboloïdes déterminés par les deux ternes de droites: $A_1 A_2 A_3, A_3 A_4 A_5$ qui ont une droite commune A_3 . Cette construction est aussi une conséquence du théorème connu: on peut construire cinq faisceaux homographiques de plans, dont les axes soient cinq droites données, et où cinq plans homologues passent toujours par un même point.

On donne quatre faisceaux homographiques de plans, dont les axes soient les droites A_1, A_2, A_3, A_4 . On demande combien de fois quatre plans homologues se coupent dans un même point*)? Les faisceaux projectifs A_1 et A_2 ; A_1 et A_3 ; A_1 et A_4 donnent trois hyperboloïdes qui ont une génératrice commune A_1 . Ces hyperboloïdes, abstraction faite de cette génératrice, s'entrecoupent en quatre points seulement**) et il est bien évident que par chacun de ces points passent quatre plans homologues des faisceaux donnés.

On démontre analogiquement qu'il y a généralement quatre plans, chacun contenant quatre points homologues de quatre divisions homographiques sur quatre droites données***).

Si les quatre faces d'un tétraèdre mobile tournent autour de quatre droites fixes A, B, C, D , et que les côtés de la première face s'appuient sur trois autres droites fixes L, M, N , le sommet opposé à cette face engendrera une courbe qu'on demande de connaître. La première face du tétraèdre, en tournant autour de A , divise homographiquement les droites L, M, N ; soient l, m, n trois points homologues de ces divisions. Il en suit que lB, mC, nD sont trois plans homologues de trois faisceaux projectifs; donc leur point d'intersection engendre une cubique gauche, qui s'appuie en deux points sur chacune des droites L, M, N †).

Ayant dans l'espace trois points a, b, c et trois plans α, β, γ , si autour d'une droite fixe on fait tourner un plan transversal qui coupera les trois plans donnés suivant trois droites A, B, C , les plans Aa, Ab, Cc se couperont en un point, dont on demande le lieu géométrique. Soient a', b', c' les points où la droite donnée rencontre les plans α, β, γ . Ces plans contiennent trois faisceaux projectifs de droites, dont a', b', c' sont les centres, et A, B, C sont trois rayons homologues. Donc les droites aa', bb', cc' sont les axes de trois faisceaux projectifs de plans, dont Aa, Bb, Cc sont trois éléments

*) STEINER, Systematische Entwicklung der Abhängigkeit etc. p. 298.

**) CHASLES, Journal de M. LIOUVILLE, l. c.

***) STEINER, l. c.

†) CHASLES, Aperçu historique etc. Note 33°.

correspondants, et par conséquent le point commun à ces plans engendrera une cubique gauche qui aura deux points sur chacune des droites aa' , bb' , cc' *)).

IV.

11. On donne un hexagone gauche 123456 inscrit dans une cubique gauche. Par les côtés de l'hexagone menons six plans à un point quelconque x de la courbe. Ces plans coupent les côtés opposés respectivement à ceux par lesquels ils passent en six points a, b, c, a', b', c' (a, b, c étant sur trois côtés consécutifs, et a', b', c' sur les côtés opposés). *Ces six points sont dans un même plan, qui passe par le point variable x de la courbe, et par une droite fixe. Cette droite fixe est une corde réelle ou idéale de la cubique.* Les six points $a, b, \dots c'$ forment un hexagone de BRIANCHON (les diagonales aa' , bb' , cc' se rencontrent au point x).

Si le point x parcourt la cubique, les points $a, b, \dots c'$ engendrent six divisions homographiques sur les côtés de l'hexagone; les droites aa' , bb' , cc' engendrent trois hyperboloïdes qui passent tous par la cubique et chacun par une couple de côtés opposés de l'hexagone. Ces trois hyperboloïdes ont pour génératrice commune à tous la corde fixe sur laquelle tourne le plan des six points $a, b, \dots c'$.

C'est-à-dire: les trois hyperboloïdes qui passent par une cubique gauche et chacun par une couple de côtés opposés d'un hexagone inscrit dans la cubique ont en commun une même génératrice qui est une corde réelle ou idéale de la courbe.

12. *Si par un des sommets de l'hexagone gauche on mène deux plans tangens à la cubique, qui passent respectivement par les côtés qui ont en commun le dit sommet, ces plans coupent les côtés opposés en deux points, qui avec le premier sommet déterminent un plan passant aussi par une droite fixe, quelque soit le sommet qu'on a choisi dans l'hexagone.* Cette droite fixe est la même qui est commune aux trois hyperboloïdes, et autour de laquelle tourne le plan $ab \dots c'$.

On peut nommer cette droite la *caractéristique* de l'hexagone 123456.

Six points de la cubique donnent lieu à soixante hexagones; chacun d'eux a sa caractéristique et ses trois hyperboloïdes. Un hyperboloïde contient quatre caractéristiques; par exemple les hexagones

$$(123456), (126453), (123546), (126543)$$

ont leurs caractéristiques situées sur l'hyperboloïde (12—45). Chaque caractéristique

*) CHASLES, *Aperçu etc.* l. c.

est commune à trois hyperboloïdes, donc il y a quarante-cinq hyperboloïdes pour six points donnés sur la cubique gauche.

On déduit très aisément du théorème fondamental donné ci-dessus la suivante proposition de M. CHASLES*):

Quand un eptagone gauche a ses sommets situés sur une cubique gauche, le plan de l'un quelconque des angles de l'eptagone et les plans des deux angles adjacents rencontrent respectivement les côtés opposés en trois points qui sont dans un plan passant par le sommet du premier angle.

V.

13. Une cubique gauche peut avoir trois asymptotes réelles, ou bien une seule asymptote réelle et deux imaginaires. Comme cas particuliers, la courbe peut avoir une seule asymptote réelle à distance finie, et les deux autres coïncidentes à l'infini, ou bien elle peut être osculée par le plan à l'infini. Il serait bon d'adopter les dénominations que M. SEYDEWITZ**) propose pour ces quatre formes de cubique gauche, savoir: *hyperbole gauche; ellipse gauche; hyperbole parabolique gauche; parabole gauche.*

*L'ellipse gauche a deux plans osculateurs parallèles entre eux qui coupent la surface développable (dont la courbe est l'arête de rebroussement) suivant deux paraboles; tous les autres plans osculateurs coupent la même surface suivant des ellipses ou des hyperboles. Les centres de toutes ces coniques sont sur une hyperbole dont le plan est parallèle et équidistant aux deux plans osculateurs parallèles. Une branche de l'hyperbole locale contient les centres des ellipses; l'autre branche contient les centres des hyperboles. Les points de la cubique auxquels correspondent des ellipses sont situés entre les plans osculateurs parallèles; les points auxquels correspondent des hyperboles sont au dehors. Le plan de l'hyperbole locale rencontre la cubique en un seul point réel***) et coupe les cônes du second ordre qui passent par la courbe suivant des ellipses.*

L'hyperbole gauche n'a pas de plans osculateurs parallèles; tous ses plans osculateurs coupent la surface développable qu'ils enveloppent suivant des hyperboles, dont les centres sont sur une ellipse. Le plan de cette ellipse rencontre la cubique en trois points réels,

*) *Aperçu etc.* l. c.

**) GRUNERTS, *Archiv etc.* X, p. 203.

***) *Chaque plan passant par une droite intersection de deux plans osculateurs réels (imaginaires) coupe la cubique gauche en un seul point réel (en trois points réels):* théorème que j'ai démontré ailleurs (*Annali di Matematica*, gennaio-febbraio 1859). M. JOACHIMSTHAL avait donné ce même théorème dans la savante Note qui suit le mémoire de M. SCHRÖTER (ce Journal, B. 56, p. 45)

et coupe les cônes du second ordre qui passent par la cubique suivant des hyperboles.

L'hyperbole parabolique gauche est l'arête de rebroussement d'une surface développable qui est coupée par ses plans tangens suivant des hyperboles, à l'exception d'un seul qui la coupe suivant une parabole. Les centres de ces hyperboles sont sur une autre parabole. Les deux paraboles sont dans un même plan; et ce plan coupe les cônes du second ordre qui passent par la cubique suivant des paraboles.

La parabole gauche a toutes ses asymptotes qui coïncident à l'infini. Les plans osculateurs coupent la développable suivant des paraboles.

14. M. SEYDEWITZ a déjà observé que par une hyperbole gauche passent trois cylindres du second ordre hyperboliques; par une ellipse gauche passe un seul cylindre elliptique; par l'hyperbole parabolique gauche passent deux cylindres, l'un hyperbolique et l'autre parabolique; enfin par la parabole gauche passe un seul cylindre parabolique. Cela nous aidera à énoncer des propositions nouvelles.

Concevons la droite intersection du plan osculateur au point a d'une cubique gauche avec le plan qui coupe cette courbe en a et la touche en b ; toute corde de la cubique qui s'appuie à cette droite est rencontrée harmoniquement par une deuxième droite, qui est l'intersection du plan osculateur en b avec le plan sécant en b et tangent en a .

Cette intéressante propriété donne lieu à plusieurs conséquences. Si l'une des deux droites dont il est question ci-dessus tombe à l'infini, la corde est bissectée par l'autre droite. Cela donne lieu au théorème qui suit:

En chaque point d'une parabole gauche on peut mener un plan tangent, qui soit parallèle au cylindre passant par la courbe. Toute corde de celle-ci parallèle à ce plan est divisée en deux parties égales par une droite (diamètre) qui est l'intersection du plan osculateur et du plan sécant au même point et tangent à l'infini. Tous ces diamètres, dont un passe par chaque point de la parabole gauche, sont parallèles à un même plan, savoir à la direction commune des plans tangens à l'infini.

Cette propriété qui, dans la parabole gauche, subsiste pour chacun de ses points, appartient aussi à l'hyperbole et à l'ellipse gauche, mais seulement pour les points (trois ou un seul) où elles sont rencontrées par le plan des centres des coniques inscrites dans la surface développable dont la courbe gauche est l'arête de rebroussement.

Donc l'ellipse gauche a un diamètre qui rencontre en un même point la courbe et le plan des centres. Le plan qui touche la courbe en ce point et est parallèle au cylindre elliptique passant par celle-ci est aussi parallèle aux cordes divisées en deux parties égales par le diamètre nommé.

L'hyperbole gauche a trois diamètres. Ici il faut remarquer que: à chaque point commun à la cubique et au plan des centres correspond une asymptote de celle-ci ou bien un des trois cylindres hyperboliques. Voilà en quoi consiste cette correspondance:

Le plan osculateur de l'hyperbole gauche en un point du plan des centres, et le plan qui passe par ce point et par l'asymptote correspondante, s'entrecoupent suivant une droite qui est un diamètre de la conique intersection du plan osculateur avec le cylindre hyperbolique qui contient l'asymptote nommée.

VI.

15. On sait que le point de concours et les points de contact de trois plans osculateurs d'une cubique gauche sont en un même plan*). Le point de concours a reçu le nom de *foyer* du plan. Tous les plans qui passent par une même droite ont leurs foyers sur une autre droite, et tous les plans qui passent par cette deuxième droite ont leurs foyers sur la première. Deux droites telles que les points de l'une soient les foyers des plans qui passent par l'autre ont reçu la dénomination de *droites réciproques*. Une droite qui soit l'intersection (réelle ou idéale) de deux plans osculateurs et la corde (réelle ou idéale) qui joint les points de contact sont des droites réciproques.

On sait que dans un plan quelconque il n'y a qu'une droite qui soit intersection de deux plans osculateurs**), et par un point quelconque on ne peut mener qu'une corde de la cubique gauche***).

Concevons un plan qui coupe un autre plan contenant une conique et cherchons le pôle de la droite intersection des deux plans par rapport à la conique ; nous dirons que *ce point est le pôle du premier plan par rapport à la conique*.

Cela premis, *les pôles d'un plan quelconque par rapport à toutes les coniques inscrites dans la développable, dont une cubique gauche donnée est l'arête de rebroussement, sont tous dans une conique, dont le plan a tous ses pôles, par rapport aux mêmes coniques inscrites, dans une autre conique située dans le premier plan*.

J'appelle *conjointes* deux plans tels que l'un contient les pôles de l'autre par rapport aux coniques inscrites dans la développable, et *conjointes* les coniques lieux des pôles de deux plans conjoints.

Deux plans conjoints s'entrecoupent suivant une droite qui est toujours l'intersection (réelle ou idéale) de deux plans osculateurs, et par conséquent ils ont leurs foyers sur la droite qui passe par les points de contact.

Il suit de là que:

*) CHASLES, Journal de M. LIOUVILLE, année 1857, p. 397.

**) SCHRÖTER, ce Journal, B. 56, p. 33.

***) CHASLES, l. c.

Toute droite qui soit l'intersection de deux plans osculateurs est l'axe d'un faisceau de plans conjoints deux à deux; ces plans forment une involution dont les éléments doubles sont les plans osculateurs.

Toute corde de la cubique gauche contient les foyers d'un faisceau de plans conjoints deux à deux; ces foyers forment une involution dont les éléments doubles sont les points de la cubique.

16. *Toutes les coniques conjointes qui appartiennent à un même faisceau sont situées sur un même hyperboloïde à une nappe; et le lieu géométrique de leurs centres est une conique dont le plan passe par la droite des foyers.*

Il est facile d'établir aussi l'espèce de ces coniques conjointes selon les divers cas à considérer. Par exemple, pour la parabole gauche on a le théorème qui suit:

Toutes les coniques conjointes qui appartiennent à un même faisceau sont des hyperboles, à l'exception d'une seule parabole dont le plan passe par le point central de l'involution des foyers. Les centres de ces hyperboles sont dans une parabole. Les cordes de cette parabole qui joignent deux à deux les centres des coniques conjointes passent toutes par un même point. Les asymptotes des coniques conjointes sont toutes parallèles à deux plans.

VII.

17. Il est facile de construire une cubique gauche sur un des cylindres qui passent par elle. Une cubique gauche étant rapportée à trois axes, nous supposons que l'unité linéaire change de l'un axe à l'autre; θ exprimera toujours une variable.

On construit très aisément la parabole gauche au moyen des équations:

$$x = \theta^3, \quad y = \theta^2, \quad z = \theta^*).$$

L'équation:

$$x^2 - y = 0$$

représente le cylindre (parabolique) qui passe par la courbe. L'origine des coordonnées est un point quelconque de celle-ci; le plan des zy est osculateur; celui des xz est tangent à l'origine et parallèle au cylindre; le plan des xy est tangent à l'infini.

La courbe n'a qu'une branche qui s'étend à l'infini tout le long du cylindre, sans asymptotes.

18. Pour l'hyperbole parabolique gauche on a les équations:

$$x = \frac{\theta^3}{\theta - \alpha}, \quad y = \theta^2, \quad z = \theta,$$

*) Annali di Matematica — Roma — maggio 1858; settembre 1858; gennaio 1859; luglio 1859.

α est une constante. Le cylindre parabolique qui passe par la courbe est représenté par l'équation :

$$x^2 - y = 0.$$

L'origine est un point arbitraire de la courbe; le plan des xy est osculateur; celui des xz est tangent à l'origine et parallèle au cylindre parabolique; le plan des yz est parallèle aux deux cylindres qui passent par la courbe.

La courbe est composée de deux branches infinies, dont chacune a un bras sans asymptote; les deux autres bras ont une asymptote commune qui est une génératrice du cylindre parabolique.

Les deux branches diffèrent en cela, par rapport au cylindre parabolique, que, si on suppose ceci vertical, les bras d'une branche s'étendent tous les deux en haut^[31] à l'infini, tandis que l'autre branche a un bras qui s'étend en haut, et l'autre qui s'étend en bas.

On peut construire l'hyperbole parabolique gauche aussi par les équations :

$$x = \frac{\theta^3}{\theta - \alpha}, \quad y = \theta - \alpha, \quad z = \frac{\alpha}{\theta - \alpha}.$$

L'équation :

$$yz - \alpha = 0$$

représente le cylindre hyperbolique qui passe par la courbe. Des deux nappes de ce cylindre, l'une contient une branche, l'autre contient l'autre branche de la courbe gauche.

19. On construit l'ellipse gauche au moyen des équations :

$$x = \frac{\theta^3}{\theta^2 + \alpha^2}, \quad y = \frac{\theta^2}{\theta^2 + \alpha^2}, \quad z = \frac{\theta}{\theta^2 + \alpha^2};$$

l'équation du cylindre elliptique qui passe par la courbe est :

$$y(1 - y) - \alpha^2 x^2 = 0.$$

Ici l'origine est le point de la courbe où elle est rencontrée par le plan des centres des coniques inscrites dans la développable dont la courbe gauche est l'arête de rebroussement. Le plan des yz est osculateur; celui des xz est tangent à l'origine et parallèle au cylindre; celui des xy est tangent à l'infini.

La courbe a une seule branche qui s'étend à l'infini tout le long du cylindre, et s'approche d'une asymptote qui est une génératrice du même cylindre.

20. Si on change α^2 en $-\alpha^2$ les mêmes équations conviennent à l'hyperbole gauche, considérée sur un quelconque des trois cylindres hyperboliques qui passent par elle. La courbe est composée de trois branches infinies, dont chacune s'approche de deux asymptotes. Deux branches sont situées sur la nappe du cylindre (qu'on considère), qui contient une asymptote; la troisième branche est sur l'autre nappe.

En rapportant les trois branches aux six nappes des cylindres, on trouve que par chaque branche passent trois nappes appartenant à trois divers cylindres; une de ces nappes ne contient pas d'asymptotes, et chacune des autres en contient une.

Milan, 27 mars 1860.
