

INTORNO ALLA CURVA GOBBA DEL QUART' ORDINE
PER LA QUALE PASSA
UNA SOLA SUPERFICIE DI SECONDO GRADO. [³⁴]

Annali di Matematica pura ed applicata, serie I, t. IV (1862), pp. 71-101.

Una delle teorie più interessanti nell'alta geometria, e che da qualche tempo sembra aver attirato in modo speciale l'attenzione de' geometri, è senza dubbio quella che riguarda le linee a doppia curvatura o *curve gobbe*. Il sig. CAYLEY, giovandosi di quanto aveva fatto PLÜCKER per le linee piane *), diede, nel tomo X del giornale matematico di LIOUVILLE (1845), formole generali ed importantissime, relative alle curve gobbe ed alle superficie sviluppabili: formole, che collegano insieme l'ordine di una data curva gobba, l'ordine e la classe della sua sviluppabile osculatrice, l'ordine della linea nodale di questa sviluppabile, la classe di un'altra sviluppabile che è doppiamente tangente alla curva data, il numero de' cuspidi di questa curva e quello de' suoi piani osculatori stazionari, ecc.

Non meno importante è la memoria del sig. SALMON *On the classification of curves of double curvature* **), nella quale, superate felicemente alcune difficoltà che offre lo studio analitico di quelle curve gobbe che non sono la completa intersezione di due superficie, si stabiliscono le formole che danno tutte le curve gobbe di un dato ordine. Applicando queste formole a casi particolari, l'autore mostra che ogni curva gobba del quart'ordine può essere risguardata come la parziale intersezione di due superficie, l'una del secondo, l'altra del terz'ordine. Se le due superficie hanno in comune una conica piana (o come caso particolare un pajo di rette concorrenti), la rimanente inter-

*) PLÜCKER, *Theorie der algeb. Curven*, Bonn 1839; pag. 207 e seg.

**) *Cambridge and Dublin Math. Journal*, vol. V, 1850; pag. 23.

sezione è una curva gobba del quart' ordine, *per la quale passano infinite superficie del secondo grado*. Invece, se le due superficie hanno in comune due rette non situate in uno stesso piano, ovvero anche una sola retta, che però sia *doppia* sulla superficie di terz' ordine, la rimanente intersezione è una curva gobba di quart' ordine, *per la quale non passa alcuna superficie di secondo grado, oltre la data*.

Sonvi adunque due curve gobbe del quart' ordine, essenzialmente diverse; l'una è l'intersezione di due (epperò d' infinite) superficie di secondo grado; l'altra non può altrimenti essere definita che la parziale intersezione di una superficie del secondo con una del terz' ordine.

Per lo avanti, la linea comune a due superficie di secondo grado era la sola curva gobba del quart' ordine che si conoscesse. I signori SALMON e CAYLEY primi notarono l'esistenza della seconda curva dello stesso ordine. Questa si è poi presentata anche al sig. STEINER, nella sua preziosa memoria *Ueber die Flächen dritten Grades*, che è inserita nel tomo LIII del giornale matematico di Berlino (1857).

Nella presente memoria, con semplici considerazioni di geometria pura, e senza presupporre la conoscenza delle formole date da CAYLEY e da SALMON nelle memorie citate ed in altro ingegnoso lavoro di quest' ultimo geometra (*On the degree of the surface reciprocal to a given one* *)), io mi propongo di esporre e dimostrare, non solo le proprietà della nuova curva già dichiarate da SALMON e da STEINER, ma altre ancora che credo nuove, e segnatamente la costruzione geometrica (lineare) della curva, mediante intersezioni de' piani omologhi di tre fasci proiettivi.

Solamente ammetterò come conosciute le formole di PLÜCKER, relative alle linee piane, e perchè queste sono generalmente note, ed anche perchè spero di pubblicar fra poco una dimostrazione puramente geometrica delle medesime, in uno studio intorno alla teoria generale delle curve piane.

Siano:

m l'ordine di una data linea piana, ossia il numero de' punti in cui è segata da una retta arbitraria;

m' la classe della curva, cioè il numero delle tangenti che arrivano ad essa da uno stesso punto arbitrario;

d il numero de' punti doppi;

d' il numero delle tangenti doppie;

s il numero de' punti stazionari (cuspidi o punti di regresso).

s' il numero delle tangenti stazionarie (tangenti ne' flessi).

*) *Transactions of the R. Irish Academy* vol. XXIII, Dublin 1857.

Le formole di PLÜCKER sono:

$$\begin{aligned} m' &= m(m-1) - 2d - 3s \\ m &= m'(m'-1) - 2d' - 3s' \\ s' &= 3m(m-2) - 6d - 8s \\ s &= 3m'(m'-2) - 6d' - 8s' \\ s - s' &= 3(m - m') \\ 2(d - d') &= m(m - m')(m + m' - 9), \end{aligned}$$

le quali equivalgono a tre sole indipendenti.

§ 1.

Due superficie di secondo grado si segano, in generale, lungo una linea a doppia curvatura C del quart'ordine, per la quale passano infinite altre superficie di secondo grado. Una qualunque di queste è individuata, se debba contenere, oltre la curva C , un punto dato fuori della curva. Se questo punto si prende sulla linea retta che unisce due punti qualsivogliano della curva C , quella retta apparterrà per intero alla superficie che si vuol determinare. Questa superficie sarà dunque rigata, ossia, in generale, un iperboloide ad una falda.

Dunque, per la curva C passano infiniti iperboloidi ad una falda.

Considero la curva C , come l'intersezione di un iperboloide rigato e di un'altra superficie di secondo grado. Qualunque generatrice rettilinea dell'iperboloide incontra l'altra superficie in due punti, i quali, essendo comuni alle due superficie, appartengono alla curva C . Dunque, una generatrice qualsivoglia di un iperboloide passante per la curva C incontra questa, al più, in due punti.

La curva C non può avere più di due punti sopra una stessa retta; giacchè una retta, che incontrasse C in tre punti, dovrebbe giacere per intero su tutte le superficie che passano per C , cioè queste superficie avrebbero in comune una curva di quart'ordine ed inoltre una retta; il che è assurdo.

Per la curva C , intersezione di due superficie del secondo grado, si può far passare, in infiniti modi, una superficie del terz'ordine. A tal uopo, si assuma una retta arbitraria R , come asse d'un fascio di piani (P) proiettivo al fascio delle superficie di secondo grado (S) passanti per la curva C . Quale è il luogo delle coniche, intersezioni de' piani P colle corrispondenti superficie S ? Una retta qualsivoglia L incontra le superficie S in una serie di coppie di punti in involuzione, ed i piani P in una

serie semplice di punti, proiettiva alla prima. È noto *) esservi tre punti della seconda serie, ciascun de' quali coincide con uno de' due punti che gli corrispondono nella prima serie. Cioè sulla retta L vi sono tre punti, ciascun de' quali giace in un piano P e nella corrispondente superficie S . Il che torna a dire, che la retta qualsivoglia L incontra il luogo richiesto in tre punti, epperò questo luogo è una superficie del terz'ordine. È evidente che essa passa per la curva C e per la retta R , perchè ogni punto di queste due linee sodisfà alla condizione di trovarsi simultaneamente in due superficie omologhe P , S .

Reciprocamente: se una superficie di second'ordine ed una del terzo hanno in comune una conica piana, esse si segano inoltre lungo una curva gobba del quart'ordine, per la quale passano infinite altre superficie di secondo grado. Ciascuna di esse sega la superficie del terz'ordine in una conica, ed i piani di tutte le coniche analoghe passano per una stessa retta situata per intero sulla superficie del terz'ordine.

§ 2.

Immaginiamo ora un iperboloide I ed una superficie di terz'ordine, aventi in comune due rette A , A' non situate in un medesimo piano. La rimanente intersezione delle due superficie sarà una curva gobba K del quart'ordine. Ogni generatrice dell'iperboloide, del sistema a cui appartengono A , A' , incontra la superficie di terz'ordine in tre punti, i quali, essendo comuni alle due superficie, senza essere situati sulle rette A , A' , appartengono alla curva K . Invece, ogni generatrice dell'iperboloide I , nell'altro sistema, incontra le rette A , A' , epperò sega la superficie di terz'ordine in un solo punto fuori di queste rette. Cioè ogni generatrice del secondo sistema sega la curva K in un solo punto.

Ciascuna delle rette A , A' incontra la curva K in tre punti. Infatti: se si conduce un piano, per es. per A , esso segnerà l'iperboloide lungo A ed una retta B generatrice del secondo sistema; e lo stesso piano segnerà la curva K in quattro punti de' quali uno solo appartiene a B . Dunque, gli altri tre giacciono nella retta A .

Se una superficie del terz'ordine passa per due generatrici, d'uno stesso sistema, di un iperboloide, la rimanente intersezione delle due superficie è una curva gobba di quart'ordine, la quale sega in tre punti ciascuna generatrice di quel sistema ed in un solo punto ogni generatrice dell'altro sistema.

Da ciò che la curva K ha i suoi punti allineati a tre a tre sulle generatrici dell'iperboloide I , segue che per essa non passa alcun'altra superficie di secondo grado.

*) CHASLES, *Comptes rendus de l'Acad. de Paris*, tom. XLI (29 octobre 1855).

Infatti, se per K passasse, oltre I , un'altra superficie S di secondo grado, ogni generatrice di I (del primo sistema) avrebbe tre punti comuni con S , epperò giacerebbe per intero su questa superficie; il che è impossibile.

Così è dimostrata l'esistenza di una curva gobba di quart'ordine, che non è l'intersezione di due superficie di secondo grado. Noi la denomineremo *curva gobba di quart'ordine e seconda specie*, per distinguerla dalla *curva gobba di quart'ordine e prima specie*, cioè dalla curva per la quale passano infinite superficie di secondo grado.

Lo studio della nuova curva è assai importante, principalmente perchè essa è, dopo la cubica gobba, la più semplice fra tutte le linee geometriche a doppia curvatura. La ragione della sua maggior semplicità, in confronto dell'altra curva dello stesso ordine, sta in ciò, che questa sega in due punti *tutte* le generatrici degli iperboloidei passanti per essa, e non è da alcuna retta incontrata in tre punti; mentre la curva di seconda specie ha i suoi punti distribuiti a tre a tre sulle generatrici del primo sistema, e ad uno ad uno sulle generatrici dell'altro sistema dell'unico iperboloide passante per la curva. Onde segue che la curva di seconda specie si può *costruire linearmente* per punti; infatti, facendo girare un piano intorno ad una generatrice fissa del primo sistema, i punti della curva si ottengono, uno per volta. Il che evidentemente non può aver luogo per la curva di prima specie, almeno finchè questa non sia dotata di un punto doppio o di un cuspide *).

Questa proprietà della curva di seconda specie può essere formulata in altro modo, che conduce a rimarchevoli conseguenze. Sia A una generatrice fissa (del primo sistema) dell'iperboloide I , su cui giace la curva, e siano a, a_1, a_2 i punti, in cui quella generatrice sega la curva. Un piano qualunque, condotto per la retta A , incontra la curva gobba in un unico punto m , oltre i detti a, a_1, a_2 . E reciprocamente, ogni punto m della curva determina un piano per A . Se m viene a coincidere con uno de' punti a, a_1, a_2 , per es. con a , il piano corrispondente sarà quello che tocca l'iperboloide I in a . Si assuma ora una retta arbitraria L ed in essa si formi una serie di punti proiettiva al fascio di piani condotti per A ; come tale può assumersi, a cagion d'esempio, la serie de' punti in cui L sega i piani suddetti. Sia μ il punto di L che corrisponde al piano Am ; diremo che il punto μ della retta L *corrisponde* al punto m della curva gobba.

Per tal modo, ad ogni punto della curva gobba corrisponde un punto nella retta L ,

*) La curva gobba di quart'ordine e seconda specie non può aver punti multipli, nè regressi. Perchè, se potesse averne uno, un piano condotto per tale punto e per una retta appoggiata alla curva in altri tre punti avrebbe in comune con questa più di quattro punti; il che, per una curva del *quarto* ordine, è assurdo.

e reciprocamente, ad ogni punto di L corrisponde un punto della curva. Cioè, ciascun punto della curva è rappresentato da un punto della retta; onde possiamo dire che la serie de' punti di L è *proiettiva* alla serie de' punti sulla curva gobba *).

Quindi, per *rapporto anarmonico* di quattro punti della curva intenderemo il rapporto anarmonico de' quattro punti corrispondenti nella retta L ; ed in particolare, diremo che quattro punti della curva gobba sono *armonici*, quando lo siano i quattro punti corrispondenti di L .

Il rapporto anarmonico de' quattro piani condotti per quattro punti dati della curva gobba di quart'ordine e seconda specie e per una stessa retta appoggiata alla curva in tre altri punti è costante, qualunque sia questa retta.

Ossia:

Se intorno a due rette appoggiate alla curva gobba di quart'ordine e seconda specie in tre punti, si fanno rotare due piani che si seghino sempre sulla curva, questi piani generano due fasci omografici.

§ 3.

Applicando alle cose suesposte il noto principio di dualità geometrica, si conclude, esservi due distinte superficie sviluppabili di quarta classe, cioè la sviluppabile formata dai piani tangenti comuni a due superficie di secondo grado, e la sviluppabile toccata dai piani tangenti comuni ad un iperboloide e ad una superficie di terza classe contenente due generatrici dell'iperboloide, non situate in uno stesso piano.

La prima di esse, che può chiamarsi *sviluppabile di quarta classe e prima specie*, è circonscritta ad infinite superficie di secondo grado, ed ogni generatrice rettilinea di queste superficie è l'intersezione di due piani tangenti della sviluppabile. Non v'ha alcuna retta, per la quale passino tre piani tangenti.

Invece l'altra, che diremo *sviluppabile di quarta classe e seconda specie*, è circonscritta ad una sola superficie di secondo grado, che è un iperboloide. Tutte le generatrici di questo iperboloide, di uno stesso sistema, sono intersezioni di tre piani tangenti della sviluppabile, mentre per ogni generatrice dell'altro sistema passa un solo piano tangente della sviluppabile.

Così se, data una sviluppabile di quarta classe, troviamo esservi una retta per la quale passano tre piani tangenti di quella, possiamo immediatamente concludere,

*) Questo modo di rappresentare i punti di una curva gobba sopra una retta può essere applicato alle curve gobbe d'ordine qualsivoglia n , descritte sull'iperboloide, che seghino in $n - 1$ punti le generatrici di un sistema ed in un solo punto quelle dell'altro.

che vi sono infinite rette dotate della stessa proprietà; che queste formano un iperboloide; che la sviluppabile è di seconda specie; e che i piani tangenti di questa determinano su due qualunque di quelle rette due divisioni omografiche.

La sviluppabile di quarta classe e seconda specie si è presentata, la prima volta, al sig. CAYLEY, nella sua *Note sur les hyperdéterminants* *), e poi fu considerata anche dal sig. SALMON **).

§ 4.

Data una qualsivoglia superficie del terz'ordine, fra le ventisette rette che in essa generalmente esistono ***), se ne scelgano quattro, A, B, C, D, formanti un quadrilatero storto, tali cioè, che ciascuna d'esse sia incontrata dalla susseguente e l'ultima dalla prima. Il piano delle due rette AB segnerà la superficie in una terza retta E; così i piani BC, CD, DA taglieranno la superficie medesima in altrettante rette F, G, H. Le rette EG sono in un piano, le FH in un secondo piano; e questi due piani si intersecano in una retta A' posta nella superficie. È evidente che la data superficie può essere considerata, come il luogo delle intersezioni degli elementi corrispondenti di due fasci proiettivi: l'uno di iperboloidi passanti pel quadrilatero ABCD, l'altro di piani condotti per la retta A' e corrispondenti anarmonicamente agli iperboloidi suddetti. Cioè la superficie del terz'ordine si può riguardare come data mediante quelle cinque rette A, B, C, D, A', e tre punti p, q, r i quali serviranno a individuare tre coppie di elementi omologhi nei due fasci. E questi fasci, adottando la felice notazione del sig. JONQUIÈRES †), si potranno indicare così:

$$(ABCD)(p, q, r \dots), \quad A'(p, q, r \dots).$$

Ora immaginiamo l'iperboloide I passante per le due rette A, A' e pei tre punti p, q, r . Esso sarà generabile mediante i due fasci omografici di piani:

$$A(p, q, r \dots), \quad A'(p, q, r \dots).$$

Le due superficie, quella di terz'ordine e l'iperboloide, avendo in comune le due rette A, A' (non situate in uno stesso piano), s'intersecheranno lungo una linea a

*) *Journal für die reine und ang. Mathematik*, Bd. XXXIV, pag. 151.

**) *Cambridge and Dublin Math. Journal*, vol. III, pag. 171.

***) *Cambridge and Dub. Math. Journal*, vol. IV, pag. 118 e 252.

†) *Essai sur la génération des courbes géométriques* etc. Paris 1858.

doppia curvatura K , che è la curva gobba di quart'ordine e seconda specie, nella sua più generale definizione.

La curva K è dunque il luogo delle intersezioni degli elementi omologhi de' tre fasci proiettivi:

$$(ABCD)(p, q, r \dots), \quad A(p, q, r \dots), \quad A'(p, q, r \dots).$$

La retta C incontra l'iperboloide I ne' punti c, c' ; le rette B, D , essendo appoggiate alla generatrice A , incontreranno la stessa superficie in due punti b, d : uno per ciascuna. Quindi, se si suppone dato l'iperboloide I , la curva K può riguardarsi come individuata da sette punti di esso: b, c, c', d, p, q, r . Ed è manifesto che, quando non sia dato a priori il sistema delle rette iperboliche che la curva dee segare tre volte, *per sette punti qualsivogliano di un iperboloide, si possono in generale descrivere, su di esso, due curve gobbe di quart'ordine e seconda specie.*

Osservo ancora che una curva siffatta, essendo del quart'ordine, incontra una superficie di terz'ordine, al più in dodici punti; dunque, se tredici punti della nostra curva appartengono ad una superficie del terz'ordine, la curva giace per intero su questa superficie.

Ciò premesso, ecco come può essere generata la curva di quart'ordine e seconda specie, giacente sopra un dato iperboloide I e passante per sette punti dati di esso: b, c, c', d, p, q, r . Fra le rette (generatrici) iperboliche che la curva dee segar tre volte, scelgansene ad arbitrio due: A, A' . Sia C la retta che unisce c, c' (due qualunque de' punti dati); e siano B, D le rette appoggiate su A e C e passanti rispettivamente per b, d (altri due de' punti dati). Il quadrilatero storto $ABCD$ e la retta A' si assumano come basi di due fasci proiettivi d'iperboloidi e di piani, determinando tre coppie di superficie corrispondenti mediante i punti p, q, r . Questi due fasci genereranno una superficie di terz'ordine che passerà per la curva richiesta, giacchè contiene tredici de' suoi punti: i sette dati ed i sei appartenenti alle rette A, A' . La curva richiesta sarà dunque l'intersezione di questa superficie del terz'ordine coll'iperboloide, astrazione fatta dalle rette A, A' comuni alle due superficie; ossia, essa sarà il luogo de' punti in cui si segano, a tre a tre, le superficie corrispondenti ne' tre fasci proiettivi:

$$(ABCD)(p, q, r \dots), \quad A(p, q, r \dots), \quad A'(p, q, r \dots).$$

§ 5.

Ma nella definizione e nella generazione della curva K di quart'ordine e seconda specie, ad una superficie *generale* di terz'ordine se ne può sostituire un'altra assai

più semplice, benchè dello stesso ordine. Ed in vero, assumiamo la retta A (cioè una qualunque delle rette iperboliche, che la curva dee segare tre volte) e la retta C (cioè la retta che unisce due de' sette punti dati), come assi di due fasci proiettivi di piani, il primo doppio involutorio, il secondo semplice. Cioè, il primo fascio sia formato di coppie di piani in involuzione; ed i piani del secondo fascio corrispondano, ad uno ad uno, anarmonicamente alle coppie di piani del primo. Le cinque paia d'elementi omologhi (ciascun paio essendo costituito da un piano del secondo fascio e da uno de' due corrispondenti piani del primo), necessarie per stabilire tale proiettività o corrispondenza anarmonica, si conducano per gli altri cinque punti dati della curva. Le rette intersezioni de' piani corrispondenti ne' due fasci formano una superficie gobba del terzo grado, per la quale la retta A è la direttrice *doppia* e C è la seconda direttrice *).

Questa superficie passa pei sette punti dati della curva richiesta ed inoltre pei tre punti, in cui questa incontra la retta A: dieci punti in tutto. Ma ciascuno degli ultimi tre punti è *doppio* sulla superficie di terzo grado, epperò dee contare per due intersezioni colla curva. I dieci punti equivalgono così a tredici intersezioni: dunque, la curva giace per intero sulla superficie anzidetta, Dunque:

*La curva gobba di quart'ordine e seconda specie si può sempre considerare come l'intersezione d'un iperboloide con una superficie gobba di terzo grado, che abbia per direttrice doppia una retta appoggiata alla curva in tre punti **).*

Ossia:

Per la curva gobba di quart'ordine e seconda specie, per una retta che la incontri tre volte, e per un'altra retta appoggiata alla curva in due punti, si può far passare una superficie gobba di terzo grado.

Se le due rette s'incontrano, la qual cosa non può avvenire che sulla curva (senza di che, esse determinerebbero un piano segante la curva in cinque punti), la superficie di terz'ordine diviene un cono (§ 17).

Ed ancora:

Il luogo delle intersezioni de' piani omologhi in tre fasci proiettivi di piani, il primo semplice, il secondo doppio involutorio, il terzo omografico al secondo, è una curva gobba di quart'ordine e seconda specie, che si appoggia in due punti sull'asse del primo fascio ed in tre punti sull'asse di ciascuno degli altri due fasci.

*) Vedi la mia memoria *Sulle superficie gobbe del terz'ordine* (Atti del R. Istituto Lombardo, Milano 1861). [Queste Opere, n. 27].

**) Analogamente, la sviluppabile di quarta classe e seconda specie può riguardarsi come l'inviluppo de' piani tangenti comuni ad un iperboloide e ad una superficie gobba di terzo grado, che abbia per direttrice non doppia una generatrice dell'iperboloide, per la quale debbano passare tre piani tangenti della sviluppabile.

Infatti, il secondo ed il terzo fascio generano un iperboloide, mentre il primo ed il secondo (ovvero il primo ed il terzo) generano una superficie gobba di terzo grado, avente per retta doppia una generatrice dell'iperboloide.

Reciprocamente: ogni curva gobba di quart'ordine e seconda specie ammette tale modo di generazione.

§ 6.

Suppongo ora che l'iperboloide I non sia dato a priori, e si domandi la curva gobba di quart'ordine e seconda specie che passi per sette punti a, b, c, d, e, f, g dati nello spazio e seghi tre volte una data retta A passante per g . Se si comincerà dal costruire l'iperboloide, che passa per la retta A e pe' sei punti $a, b \dots f$, il problema sarà ridotto a quello trattato precedentemente. Vediamo adunque, come si costruisca l'iperboloide I determinato da tali condizioni.

Pei cinque punti $a, b \dots e$ si può far passare una cubica gobba, che incontri due volte la retta A *). A tal uopo, si costituiscano i due fasci omografici di piani

$$A(c, d, e \dots), \quad ab(c, d, e \dots),$$

i quali generano un iperboloide passante per le rette A, ab e pei punti c, d, e ; questa superficie, avendo sette punti comuni colla cubica richiesta, passa per essa.

Forminsi poi i due fasci omografici di piani:

$$A(b, d, e \dots), \quad ac(b, d, e \dots),$$

i quali danno luogo ad un secondo iperboloide che, analogamente al primo, passa per la cubica gobba di cui si tratta. Questa curva è dunque l'intersezione de' due iperboloidi che hanno in comune la retta A, ossia essa è il luogo de' punti comuni a tre piani corrispondenti ne' tre fasci omografici:

$$A(a, b, c, d, e \dots), \quad ab(a, b, c, d, e \dots), \quad ac(a, b, c, d, e \dots).$$

Qui si noti che $ab(a)$ esprime il piano passante per ab e toccante la cubica gobba in a : piano, che si determina come corrispondente ad $A(a)$. Così dicasi di $ab(b)$, $ac(a)$, ecc.

Notiamo pure, di passaggio, che i due punti (reali o immaginari), in cui la cubica gobba incontra la retta A, si costruiscono assai facilmente, essendo essi i punti

*) CHASLES, *Comptes rendus de l'Acad. des sciences* tom. XLV (10 août 1857).

doppi delle due divisioni omografiche formate sopra A dai due fasci, i cui assi sono ab ed ac .

Ora si consideri il punto f dato nello spazio, e si domandi la retta B, che parte da questo punto e va ad incontrar due volte la cubica gobba: retta che esiste sempre ed è unica, essendo essa la generatrice comune agli infiniti iperboloidi, che passano pel punto f e per la cubica. Se tale retta si suppone trovata, il fascio $B(a, b, c, d, e)$ riesce omografico al fascio $A(a, b, c, d, e)$. S'immagini dunque il cono di secondo grado passante per le quattro rette $f(a, b, c, d)$ e capace del rapporto anarmonico $A(a, b, c, d)$; ed analogamente, s'immagini il cono avente per generatrici le quattro rette $f(a, b, c, e)$ e capace del rapporto anarmonico $A(a, b, c, e)$. È evidente che la retta richiesta B dee trovarsi sopra entrambi questi coni, essa sarà dunque la loro quarta generatrice comune, dopo le tre $f(a, b, c)$. Questa retta si determina linearmente, senza presupporre effettuata la costruzione de' due coni.

Trovata così la retta B, se si assumono i fasci proiettivi:

$$A(a, b, c \dots), \quad B(a, b, c \dots),$$

essi generano l'iperboloide I, che dee contenere la retta A ed i sei punti $a, b, \dots f$.

Allora, la richiesta curva K di quart' ordine e seconda specie si conseguirà, introducendo un terzo fascio, per es. coll'asse ef , il quale, insieme col fascio di piani per A, generi una superficie gobba di terzo grado. Ben inteso che la proiettività fra questi due fasci non sia la semplice omografia, ma bensì tale che i piani del secondo fascio vengano accoppiati in involuzione, ed a ciascuna coppia corrisponda un solo piano del primo fascio.

La retta tangente in un punto qualunque m della curva K si ottiene costruendo il piano tangente, in m , all'iperboloide I ed il piano tangente, nel punto stesso, alla superficie gobba di terzo grado dianzi nominata *).

Trovata la tangente in m , si assuma come direttrice non doppia di una superficie gobba di terzo grado passante per la curva K, e la cui direttrice doppia sia per es. la retta A. Tale superficie sarà generata da due fasci proiettivi di piani, l'uno semplice intorno alla tangente, l'altro doppio involutorio intorno ad A. È evidente che quel piano del primo fascio, che corrisponde al piano Am del secondo, è osculatore alla curva gobba in m .

*) La costruzione del piano tangente in un punto dato d'una superficie gobba di terzo grado si trova nella mia memoria già citata *Sulle superficie gobbe del terz'ordine*.

§ 7.

Siano date sulla curva gobba K (di quart'ordine e seconda specie) e sopra una retta qualsivoglia R , due semplici serie proiettive di punti, tali cioè, che a ciascun punto dell'una corrisponda un punto nell'altra e reciprocamente. Cotali serie si possono ottenere così. Si assuma una retta A , appoggiata in tre punti alla curva K , come asse di un fascio di piani P , omografico ad una serie di punti data sulla retta R . Ogni piano P sega la curva gobba in un solo punto m , fuori dell'asse A ; questo punto m della curva sarà il corrispondente di quel punto μ di R , che è omologo al piano P .

Di qual grado è la superficie gobba, luogo della retta $m\mu$, cioè della retta che unisce due punti corrispondenti nelle due date serie proiettive? Ossia, quante rette analoghe ad $m\mu$ sono incontrate da una retta arbitraria L ?

Un punto qualunque μ , preso nella retta R , ha il suo corrispondente m sulla curva gobba; e se per m e per la retta L si conduce un piano, questo sega R in un punto μ' . Se invece si assume ad arbitrio il punto μ' in R , il piano condotto per esso e per L sega K in quattro punti m , ai quali corrispondono altrettanti punti μ in R . Dunque, variando nella retta R simultaneamente μ e μ' , ad ogni punto μ corrisponde un solo μ' , ma ad ogni μ' corrispondono quattro punti μ . Ossia, μ genera un'involuzione di quart'ordine*), mentre μ' genera una semplice serie proiettiva all'involuzione medesima. Vi saranno dunque cinque punti μ' ciascuno de' quali coincide con uno de' corrispondenti μ . Ma quando ha luogo tale coincidenza, la retta $m\mu$ è una generatrice della superficie di cui si tratta; dunque, *la superficie richiesta è del quinto ordine {e di genere zero}*.

Queste conclusioni stanno, comunque sia situata la retta R , rispetto alla curva

*) Se in un piano si ha un fascio di curve d'ordine n , passanti per gli stessi n^2 punti, esse segano una retta arbitraria L in una serie di punti aggruppati ad n ad n : ogni gruppo essendo formato dalle intersezioni di L con una stessa curva del fascio. Tale serie di gruppi di punti denominasi *involuzione* d'ordine n .

Un secondo fascio di curve d'ordine n' determina su L un'altra involuzione d'ordine n' . Se i due fasci sono proiettivi, tali sono pure le due involuzioni, cioè i gruppi dell'una corrispondono anarmonicamente ai gruppi dell'altra. Vi sono $n+n'$ punti di L , in ciascun de' quali sono riuniti due punti appartenenti a due gruppi corrispondenti. Tali $n+n'$ punti sono quelli in cui la retta L sega la curva d'ordine $n+n'$, luogo delle intersezioni delle curve omologhe ne' due fasci proiettivi dati (JONQUIÈRES: *Annali di Matematica*, Roma 1859). [35]

Nella ricerca superiore si ha $n=4$, $n'=1$.

gobba K . Se queste linee non hanno alcun punto comune, ogni piano condotto per R sega K in quattro punti; e la sezione fatta da quel piano nella superficie di quint'ordine consta della retta (direttrice) R e delle quattro rette (generatrici) che uniscono quei quattro punti di K ai loro corrispondenti in R . Dunque, in tal caso, R è una retta *semplice* (non multipla) per la superficie di quint'ordine. { Vi è una curva doppia del 6.º ordine }.

Se R ha un punto α comune con K , ogni piano condotto per R sega la curva in altri tre punti, i quali, uniti ai loro corrispondenti in R , danno altrettante generatrici della superficie di quint'ordine. La quarta generatrice è la retta che unisce il punto α della curva K al corrispondente α di R , epperò coincide colla stessa R . In questo caso, adunque, la retta R è *doppia* sulla superficie di quint'ordine. Ossia, in ogni punto μ di R , questa superficie ha due piani tangenti: l'uno è il piano determinato da R e dalla generatrice $m\mu$; l'altro, costante qualunque sia μ , è il piano passante per R e per la retta tangente in α alla curva gobba K .

Ma se il punto α coincide con α , cioè se nelle due serie proiettive date il punto α corrisponde a sè medesimo, allora è evidente che ogni retta condotta per α , nel piano che ivi tocca K e passa per R , soddisfa alla condizione di unire un punto di K col corrispondente di R ; quindi la superficie di quint'ordine si decomporrà nel piano anzidetto ed in una superficie del quart'ordine, per la quale R è una retta semplice. Ogni piano condotto per R sega la superficie secondo tre generatrici: i tre punti in cui queste si segano a due a due, sono punti doppi della superficie di quart'ordine. Dunque, questa ha, per curva doppia, una cubica gobba incontrata due volte da ciascuna generatrice.

Suppongasì ora R appoggiata in due punti α, α' alla curva K e siano α, α' i corrispondenti punti di R . La retta R è tripla per la superficie di quint'ordine, tenendo essa luogo di direttrice e di due generatrici $\alpha\alpha, \alpha'\alpha'$.

Se α coincide con α , la superficie riducesi al quart'ordine colla retta doppia R ed una conica doppia [³⁶]. Se anche α' coincide con α' , si ottiene una superficie di terzo grado, avente R per direttrice semplice, ed inoltre un'altra direttrice rettilinea che è doppia.

Da ultimo, supponiamo R passante per tre punti $\alpha, \alpha', \alpha''$ della curva K ; ed a questi punti della curva gobba corrispondano nella retta R i punti $\alpha, \alpha', \alpha''$. Se ciascuno di questi tre punti è distinto dal suo corrispondente, R tien luogo di direttrice e di tre generatrici $\alpha\alpha, \alpha'\alpha', \alpha''\alpha''$, epperò essa è una retta quadrupla per la superficie di quint'ordine.

Se α coincide con α , avremo una superficie di quart'ordine colla retta tripla R .

Se inoltre α' coincide con α' , la superficie è del terz' ordine colla retta doppia R. In questo caso, la superficie non ha altra direttrice rettilinea, distinta da R. In ogni punto μ di R, la superficie è toccata da due piani; l'uno, variabile, è determinato da R e dalla generatrice μm ; l'altro, costante, è il piano che passa per R e tocca in α'' la curva gobba K^*).

Se anche α'' coincide con α'' , abbiamo una superficie del second' ordine, cioè l'iperboloide I passante per la curva K.

È ovvio che, eccettuato il caso nel quale R è una retta quadrupla, la superficie di quint' ordine ha, oltre R, una linea doppia, la quale è del sesto o del terz' ordine o una retta, secondo che R sia semplice, doppia o tripla sulla superficie [³⁷]. Tale linea doppia è il luogo de' punti, in cui s'incontrano a due a due le generatrici che si ottengono segnando la superficie con un piano mobile intorno ad R.

Per tal guisa, un solo e semplice problema, ci ha condotti a varie superficie gobbe di quinto, quarto e terz' ordine, passanti per la curva gobba di quart' ordine e seconda specie.

§ 8.

Data la curva gobba K e date due rette R, R', quale è il grado della superficie gobba, luogo di una retta che si muova appoggiandosi alle tre direttrici K, R, R'? Assunta una retta arbitraria L, cerchiamo quante generatrici della richiesta superficie siano incontrate da L, ossia quante rette vi abbiano che incontrino le quattro linee K, R, R', L. Le rette appoggiate alle tre linee R, R', L formano un iperboloide, il quale, se le date rette R, R' non hanno punti comuni colla curva gobba K, è da questa incontrato in otto punti. Dunque, la richiesta superficie è dell'ottavo grado. Per essa, la curva K è semplice, perchè da ogni punto di questa curva parte una sola retta che incontri R ed R'. Ma queste due direttrici rettilinee sono quadruple sulla superficie dell'ottavo grado, perchè il piano condotto, a cagion d'esempio, per un punto di R e per la retta R' sega la curva gobba in quattro punti.

*) In generale, una superficie gobba del terzo grado può risguardarsi, come il luogo delle rette che uniscono i punti omologhi di due semplici serie proiettive, l'una di punti d'una retta R, l'altra di punti d'una conica C. Se R e C non hanno alcun punto comune, la superficie ha un'altra direttrice (doppia), che è una retta appoggiata in un punto alla conica C (vedi la mia memoria *Sur quelques propriétés* etc. nel tomo LVIII del giornale matematico di Berlino [Queste Opere, n. 24]). Ma se R e C hanno un punto comune, le due direttrici rettilinee coincidono in R, che è in tal caso la retta doppia. Veggasi, a questo proposito, la nota *Sur les surfaces gauches du troisième ordre*, che uscirà fra breve nello stesso giornale succitato.

Ogni punto comune alla curva K e ad una delle direttrici rettilinee diminuisce di un'unità il grado della superficie. Per es., se entrambe le rette R, R' incontrano K in due punti, la superficie è del quarto grado e per essa le rette date sono *doppie*.

Invece, se R incontra K in tre punti, mentre R' non abbia con questa curva che due punti comuni, la superficie è, come si è già trovato altrimenti (§ 5), del terz' ordine. R è la retta doppia, ed R' è la seconda direttrice.

Se R ed R' sono entrambe appoggiate a K in tre punti, si ottiene una superficie di secondo grado, cioè quell'unico iperboloide che passa per la data curva gobba di quart'ordine e seconda specie.

§ 9.

Cerchiamo di quale grado sia la superficie generata dal movimento di una retta, che debba incontrar due volte la curva gobba K ed una volta una data retta R . Da ogni punto di questa retta partono tre rette, che vanno ad incontrar due volte la curva gobba *), cioè tre generatrici della superficie di cui si tratta. Dunque, la retta R sarà tripla su questa superficie. Ogni piano menato per R incontra la curva gobba in quattro punti che uniti a due a due danno sei generatrici. La sezione fatta da quel piano, nella superficie, consta di queste sei generatrici e della retta tripla R ; dunque, la superficie è del nono ordine. Per essa, la curva K è tripla, perchè il piano condotto per un punto qualunque m di K e per R incontra la curva in altri tre punti m_1, m_2, m_3 , onde da m partono tre generatrici $m(m_1, m_2, m_3)$ della superficie. Questa ha inoltre una curva doppia del terz' ordine, che è il luogo dei punti in cui si segano le coppie di lati opposti del quadrangolo completo $mm_1m_2m_3$.

Se la retta R incontra la curva K in un punto o , la superficie di nono ordine si risolve nel cono di terz'ordine che ha il vertice in o e passa per K (§ 17), ed in una superficie di sesto grado, per la quale la curva K è doppia e la retta R è tripla.

Se R incontra K in due punti o, o' , la superficie di nono ordine si scompone ne' due coni prospettivi alla curva gobba, i cui vertici sono o, o' , ed in una superficie di terzo grado per la quale R è la retta doppia.

Finalmente, se R è appoggiata alla curva K in tre punti, la superficie di nono ordine consta de' tre coni aventi i vertici in quei punti e passanti per la curva gobba.

Nel caso che la retta R sia appoggiata in due punti o, o' alla curva K , il risultato può enunciarsi così:

Se intorno ad una retta appoggiata alla curva gobba di quart'ordine e seconda specie

*) Questa asserzione sarà dimostrata in seguito al § 16.

in due punti, si fa girare un piano che seghi la curva in altri due punti, la retta che unisce questi due punti ha per luogo una superficie di terzo grado, la cui direttrice doppia è la retta data.

Le due generatrici dell'iperboloide I, passanti per o , o' ed appoggiate alla curva K in due altri punti formano, insieme con questa curva, la completa intersezione dell'iperboloide colla superficie gobba di terzo grado, di cui si tratta.

Osserviamo che le coppie di punti, in cui la curva K è incontrata dalle singole generatrici di questa superficie di terzo grado, ossia dai piani condotti per la data retta R, sono in involuzione; vogliam dire, i piani determinati da quelle coppie di punti e da una retta fissa appoggiata alla curva K in tre punti, sono in involuzione.

Reciprocamente: se sulla curva K sono date più coppie di punti in involuzione, le rette congiungenti i punti coniugati sono incontrate tutte da una medesima retta, appoggiata alla curva gobba in due punti, epperò formano una superficie di terzo grado. Siccome l'involuzione è determinata da due coppie di punti coniugati m, m' ed n, n' , così basterà dimostrare che le rette mm' , nn' sono incontrate da una medesima retta appoggiata alla curva gobba in due punti. Se intorno alla retta mm' si fa girare un piano che seghi di nuovo la curva K in due punti, questi generano un'involuzione. Così pure, facendo girare intorno ad nn' un piano, si otterrà una seconda involuzione. Le due involuzioni hanno, com'è noto, una coppia comune di punti coniugati (reali o immaginari), epperò la retta (reale) che li unisce è appoggiata ad entrambe le mm' , nn' ; c. d. d.

§ 10.

Sia dato l'iperboloide I e su di esso la curva gobba K di quart'ordine e seconda specie. Una retta A (generatrice dell'iperboloide) appoggiata in tre punti a questa curva, si assuma come direttrice doppia di una superficie gobba di terzo grado, del resto arbitraria. Essa segherà l'iperboloide, lungo un'altra curva gobba di quart'ordine e seconda specie, ed incontrerà la curva data in dodici punti; ma tre di essi sono nella retta doppia A, i quali contano come sei intersezioni; dunque:

Quando due curve gobbe di quart'ordine e seconda specie, tracciate sullo stesso iperboloide, incontrano, ciascuna in tre punti, una stessa generatrice di esso, le due curve si segano in sei punti.

Ossia:

Due superficie gobbe di terzo grado aventi la stessa retta doppia ed un iperboloide passante per questa retta hanno, all'infuori di essa, sei punti comuni.

Se, invece della retta A, prendiamo, come retta doppia della superficie di terzo grado, una generatrice dell'iperboloide appoggiata alla curva K in un solo punto, avremo evidentemente:

Quando due curve gobbe di quart'ordine e seconda specie, tracciate sullo stesso iperboloide, incontrano, l'una in tre punti e l'altra in un solo punto, una medesima generatrice di quello, le due curve si segano in dieci punti.

Per la generatrice A dell'iperboloide I, appoggiata alla curva K in tre punti, s'immagini condotto un altro iperboloide; questo segnerà il primo lungo una cubica gobba, ed incontrerà la curva data in otto punti, tre de' quali sono nella retta A; dunque:

Quando una cubica gobba, ed una curva gobba di quart'ordine e seconda specie, tracciate sopra uno stesso iperboloide, incontrano, ciascuna in un punto solo, una medesima generatrice di quello, le due curve si segano in cinque punti.

Ossia:

Due iperboloidi aventi una generatrice comune, ed una superficie gobba di terzo grado, per la quale quella generatrice sia la retta doppia, hanno, all'infuori di essa, cinque punti comuni.

Invece, se il secondo iperboloide si fa passare per una generatrice del primo, appoggiata alla curva K in un punto solo, si avrà:

Quando una cubica gobba ed una curva gobba di quart'ordine e seconda specie, tracciate sullo stesso iperboloide, incontrano, l'una in due punti e l'altra in un solo, una medesima generatrice di quello, le due curve hanno sette punti comuni.

§ 11.

Le generatrici dell'iperboloide I, del primo sistema, segano la curva K in tre punti. Si può domandare, se vi sia alcuna di quelle generatrici, per la quale due di quei tre punti siano riuniti in un solo; cioè, se vi sia alcuna generatrice dell'iperboloide I, tangente alla curva gobba. A tal uopo, osserviamo che i punti della curva, essendo distribuiti a tre a tre in linea retta, formano un'involuzione del terz'ordine. Una tale involuzione ha quattro punti doppi, cioè, vi sono quattro gruppi o terne in ciascuna delle quali due punti sono riuniti *); dunque:

*) Vedi la nota a pag. 290. In un fascio di curve d'ordine n , ve ne sono in generale $2(n-1)$ che toccano una data retta L. Dunque, un'involuzione d'ordine n ha $2(n-1)$ elementi doppi.

Vi sono quattro generatrici dell'iperboloide I passante per la curva gobba di quart'ordine e seconda specie, che sono tangenti alla curva stessa.

In seguito, designeremo con T una qualunque di queste quattro generatrici tangenti; con t il punto in cui essa è tangente alla curva gobba, e con t' il punto in cui è semplicemente segante.

Ogni altra tangente della curva K , essendo anche tangente all'iperboloide I , non incontra questa superficie in altri punti, oltre quello di contatto; dunque, la superficie sviluppabile V osculatrice della curva K , cioè il luogo delle tangenti alla curva data, ha in comune coll'iperboloide esclusivamente la curva stessa e le quattro generatrici T . La curva K è semplice per l'iperboloide, ed è cuspidale per la sviluppabile; per la qual cosa dee contar due volte nell'intersezione delle due superficie. Questa intersezione equivale dunque complessivamente ad una linea del dodicesimo ordine; quindi:

La sviluppabile osculatrice della curva gobba di quart'ordine e seconda specie è del sesto ordine.

Ossia:

Una retta qualsivoglia incontra sei tangenti della curva gobba di quart'ordine e seconda specie.

Od anche:

Per una retta arbitraria si possono condurre sei piani tangenti alla curva gobba di quart'ordine e seconda specie.

È evidente che in ciascuno de' quattro punti t l'iperboloide e la sviluppabile V hanno un contatto di second'ordine, onde ciascuno de' quattro piani osculatori alla curva ne' punti t conterà per tre piani tangenti comuni alle due superficie. Ed è anche evidente che queste non possono avere altri piani tangenti comuni. Dunque, il numero de' piani tangenti comuni alle due superficie, ossia il prodotto de' numeri esprimenti le loro rispettive classi è dodici; epperò:

La sviluppabile osculatrice della curva gobba di quart'ordine e seconda specie è della sesta classe.

Ossia:

Per un punto preso arbitrariamente nello spazio passano sei piani osculatori della curva gobba di quart'ordine e seconda specie.

La sviluppabile osculatrice ha inoltre l'importante proprietà d'essere circonscritta ad una superficie di second'ordine. Per dimostrarlo, convien premettere alcune ricerche, che formeranno l'oggetto del seguente paragrafo.

§ 12.

Lemma. Quattro punti in linea retta, a, b, c, d , danno luogo a tre rapporti anarmonici *fondamentali*:

$$(abcd) = \frac{ac}{cb} : \frac{ad}{db}, \quad (acdb) = \frac{ad}{dc} : \frac{ab}{bc}, \quad (adbc) = \frac{ab}{bd} : \frac{ac}{cd};$$

gli altri tre rapporti anarmonici $(abdc), (acbd), (adcb)$, che si possono formare con que' quattro punti, sono i reciproci de' tre superiori.

Quando due di quei tre rapporti anarmonici siano eguali, anche il terzo è eguale ai primi due. Ciò riesce evidente, osservando che, se si pone

$$(abcd) = r,$$

si ha

$$(acdb) = \frac{1}{1-r}, \quad (adbc) = \frac{r-1}{r}.$$

Ora suppongansi dati sopra una retta i tre punti a, b, c ; ed assunto ad arbitrio (nella retta) un punto m , si determini un punto m' , per modo che il rapporto anarmonico $(abcm)$ sia eguale a quest'altro $(acm'b)$ o, ciò che è lo stesso, a $(cabm')$. Variando insieme m, m' , questi punti generano due divisioni omografiche, nelle quali ad a, b, c, m corrispondono ordinatamente c, a, b, m' . Se d è uno de' due punti doppi di queste divisioni omografiche, il sistema de' quattro punti a, b, c, d avrà i suoi tre rapporti anarmonici (fondamentali) eguali fra loro.

Se i tre punti dati sono tutti reali, i due punti doppi sono immaginari. Ma questi sono reali, quando due de' tre punti dati siano immaginari coniugati. Inoltre è ovvio che, se due de' punti dati coincidono in un solo, in questo coincidono anche i due punti doppi.

In conseguenza delle cose esposte nel § 2, quanto qui è detto per punti in linea retta, sussiste per punti della curva gobba K.

Ciò premesso, domandiamo di qual classe sia la superficie, involuppo di un piano segante la curva K in quattro punti (due de' quali immaginari), i cui tre rapporti anarmonici siano eguali *). Quanti di tali piani passano per una retta qualunque, per es. per una retta appoggiata alla curva gobba in tre punti a, b, c ? Secondo il lemma premesso, i tre punti a, b, c determinano due punti, ciascuno de' quali forma con a, b, c

*) Ossia: i cui rapporti anarmonici siano le radici cubiche immaginarie dell'unità cambiate di segno. [38]

un sistema avente i rapporti anarmonici eguali. Dunque, la richiesta superficie è di seconda classe, epperò anche di second'ordine. E siccome, se due de' quattro punti (in cui la curva K è segata da uno de' piani che si considerano) coincidono in un solo, ivi cade anche uno degli altri due, così i piani osculatori della curva gobba soddisfanno alla condizione richiesta pei piani, di cui abbiamo cercato l'involuppo. Cioè:

L'involuppo di un piano segante la curva gobba di quart'ordine e seconda specie, in quattro punti aventi i tre rapporti anarmonici eguali, è una superficie di secondo grado, inscritta nella sviluppabile osculatrice della curva data.

Quale è la classe della superficie, involuppo di un piano che seghi la curva K in quattro punti armonici? Cerchiamo quanti di tali piani passino per una retta qualunque, per es. per una retta A appoggiata in tre punti a, b, c alla curva gobba. Sia d il punto della curva K coniugato armonico di a , rispetto ai due b, c ; similmente sia e il coniugato di b , rispetto ai due c, a , e sia f il coniugato di c , rispetto ai due a, b . Evidentemente i soli piani che passino per la retta A e seghino armonicamente la curva data sono $A(d, e, f)$. Dunque, l'involuppo richiesto è della terza classe.

Quando fra quattro punti armonici, due coniugati coincidono, ivi coincide anche uno degli altri due; dunque, fra i piani che segano armonicamente la curva gobba, sono da contarsi anche i suoi piani osculatori; ossia:

L'involuppo di un piano, che seghi la curva gobba di quart'ordine e seconda specie in quattro punti armonici, è una superficie di terza classe, inscritta nella sviluppabile osculatrice della curva data.

Per tal modo, la sviluppabile osculatrice della curva K ci si presenta, come involuppo de' piani tangenti comuni alla superficie di terza classe toccata dai piani che segano armonicamente la curva, ed alla superficie S di secondo grado involuppata dai piani, ciascun de' quali sega la curva in quattro punti aventi i tre rapporti anarmonici eguali.

Per ogni generatrice rettilinea della superficie di secondo grado S , passano tre piani tangenti alla superficie di terza classe; questi tre piani, essendo tangenti ad entrambe le superficie, sono osculatori alla curva K . Reciprocamente, ogni retta, per la quale passino tre piani osculatori della curva K , dee giacere per intero sulla superficie S ; dunque:

La superficie di secondo grado, involuppata dai piani che segano in quattro punti a rapporti anarmonici eguali la curva gobba di quart'ordine e seconda specie, è il luogo delle rette, per ciascuna delle quali passano tre piani osculatori della curva data.

Ossia:

Ogni piano segante la curva gobba di quart'ordine e seconda specie, in quattro punti a rapporti anarmonici eguali, contiene due rette, per ciascuna delle quali passano tre piani osculatori della curva.

Od anche:

Se per una retta, che sia l'intersezione di tre piani osculatori della curva gobba di quart'ordine e seconda specie, si conduce un piano arbitrario, questo sega la curva in quattro punti, i tre rapporti anarmonici de' quali sono eguali fra loro.

Siano M, M' le due generatrici rettilinee della superficie S , poste in un piano osculatore qualunque della curva K , e sia G la generatrice della sviluppabile V , posta nel piano medesimo. Siccome questo piano dee toccare in uno stesso punto le due superficie S e V , così il punto comune alle M, M' apparterrà a G . Questo punto appartiene anche alla curva di contatto fra le due superficie; e la tangente a questa curva in quel punto è, secondo il teorema di DUPIN, coniugata a G , ossia è la coniugata armonica di G rispetto alle M, M' .

La curva di contatto è, per la teorica di PONCELET, polare reciproca della sviluppabile V , rispetto alla superficie di secondo grado S . Ne segue che la detta curva è del sesto ordine, che la sviluppabile formata dalle sue tangenti è pure del sesto ordine, ecc.

§ 13.

Immaginiamo segata la sviluppabile V osculatrice della curva gobba K da un piano qualsivoglia P . Questo sega le generatrici ed i piani tangenti della sviluppabile in punti e rette, che sono i punti e le tangenti della curva d'intersezione della sviluppabile medesima col piano. Quindi, questa curva sarà del sesto ordine e della sesta classe, appunto come la sviluppabile, ed avrà quattro cuspidi ne' punti in cui il piano P incontra la curva cuspidale K . Se adunque, nella prima formola di PLÜCKER, si pone $m=m'=6$ ed $s=4$, ne ricaviamo $d=6$. Ciò significa che:

Un piano arbitrario contiene sei punti, ciascun de' quali è l'intersezione di due rette tangenti alla curva gobba di quart'ordine e seconda specie.

Ossia:

I punti, in cui si segano a due a due le tangenti non consecutive della curva gobba di quart'ordine e seconda specie, formano sulla sviluppabile osculatrice una curva doppia o nodale D del sest'ordine.

Per $m=d=6$, $s=4$, la terza formola di PLÜCKER dà $s'=4$, cioè la curva nel piano P ha quattro tangenti stazionarie. Una tangente stazionaria nella curva d'intersezione è la traccia, sul piano P , d'un piano tangente stazionario della sviluppabile, cioè d'un piano che ha colla curva K un contatto di terz'ordine ed oscula la sviluppabile V lungo tutta una generatrice (d'inflessione). Dunque:

La sviluppabile osculatrice della curva gobba di quart'ordine e seconda specie ha quattro generatrici d'inflessione.

Ossia:

La curva gobba di quart'ordine e seconda specie ha quattro punti, ne' quali i piani osculatori rispettivi hanno colla curva un contatto di terz'ordine.

Per $m=m'=6$, $s'=4$, la seconda formola di PLÜCKER dà $d'=6$, cioè la curva d'intersezione nel piano P ha sei tangenti doppie. Una tangente doppia è: o la traccia di un piano che tocchi la sviluppabile lungo due generatrici diverse; ovvero la intersezione di due piani tangenti distinti. Ora la nostra sviluppabile non può ammettere un piano tangente doppio: un tal piano osculerebbe la curva cuspidale K in due punti, il che equivale a segarla in sei punti: cosa impossibile per una curva del quart'ordine. Dunque:

Un piano arbitrario contiene sei rette, ciascuna delle quali è l'intersezione di due piani osculatori della curva gobba di quart'ordine e seconda specie.

Supponiamo ora che il piano segante P sia condotto ad arbitrio per una generatrice G della sviluppabile osculatrice; la sezione sarà composta di quella generatrice e di una curva di quint'ordine e sesta classe. Questa curva avrà due cuspidi, perchè il piano P, essendo tangente alla curva K, la sega in due soli punti fuori della retta G.

Quindi, facendo $m=5$, $m'=6$, $s=2$, nelle formole di PLÜCKER, avremo $d=4$, $s'=5$, $d'=5$. Qui abbiamo un flesso di più che nel caso generale: esso è il punto in cui la retta G tocca la curva di quint'ordine (ed anche la curva gobba K).

I sei punti, in cui la curva doppia D è segata dal piano P, sono i quattro punti doppi della curva piana di quint'ordine, ed i due punti in cui questa è intersecata dalla sua tangente stazionaria G. Di qui deduciamo che:

Ogni retta tangente della curva cuspidale K incontra due volte la curva doppia D.

Ossia:

Ogni tangente della curva gobba di quart'ordine e seconda specie incontra due altre tangenti della stessa curva.

Due tangenti della curva K, che s'incontrino, determinano un piano che è doppiamente tangente alla curva medesima. La sezione fatta da un tal piano, nella sviluppabile V, conterà delle due tangenti suddette e di una curva del quart'ordine e della sesta classe. Questa curva non può avere cuspidi, perchè un piano tangente alla curva K in due punti diversi, non può incontrare questa curva in alcun altro punto. Dalle formole di PLÜCKER deduciamo poi, che la curva d'intersezione ha sei flessi, tre punti doppi e quattro tangenti doppie.

Consideriamo ora la sezione fatta nella sviluppabile osculatrice da un piano P che osculi la curva K in un punto g e la seghi in un punto g' , epperò tocchi la sviluppabile medesima lungo una retta G, tangente a K in g . Nella sezione, la generatrice G conterà due volte; quindi, il piano P segherà la sviluppabile secondo una curva di

quart'ordine, avente un cuspidè in g' . Questa curva è della quinta classe, perchè per ogni punto d'un piano osculatore della curva K passano altri cinque piani osculatori.

Facendo $m=4$, $m'=5$, $s=1$, nelle formole di PLÜCKER, ne deduciamo $d=2$, $s'=4$, $d'=2$.

Dunque, il piano P sega la curva doppia D in due soli punti fuori della retta G ; e siccome la curva D è del sest'ordine, così ne segue che quel piano tocca questa curva ne' due punti, in cui è incontrata dalla retta G ; cioè:

*Ogni piano osculatore alla curva K tocca in due punti distinti la curva doppia D .
Ossia:*

La sviluppabile osculatrice della curva K è doppiamente tangente alla curva D .

Dall'esser poi $d'=2$, segue che in ogni piano osculatore della curva K vi sono due rette, ciascuna delle quali è l'intersezione di due altri piani osculatori. Queste rette sono generatrici della superficie di second'ordine S , inscritta nella sviluppabile V (§ 12).

§ 14.

Finalmente, suppongasì che il piano segante P sia uno de' quattro piani stazionari. Siccome lungo la relativa generatrice G , il piano è osculatore alla superficie V , così la rimanente sezione è una curva del terz'ordine; e questa è della quarta classe, perchè un piano stazionario rappresenta due piani osculatori coincidenti. La curva medesima non può aver regressi, giacchè i quattro punti d'incontro della curva K col piano stazionario sono tutti riuniti in un solo. Vi saranno dunque tre flessi ed un punto doppio.

È notissimo che i tre flessi d'una curva piana di terz'ordine e quarta classe sono in linea retta. Nel nostro caso, i tre flessi sono i punti in cui il piano stazionario, che si considera, sega le generatrici d'inflessione poste negli altri tre piani stazionari. Dunque, le generatrici d'inflessione sono incontrate tutte e quattro da quattro rette, rispettivamente situate nei quattro piani stazionari. Perciò:

Le quattro tangenti della curva gobba di quart'ordine e seconda specie, situate ne' suoi piani osculatori stazionari, giacciono sopra uno stesso iperboloide.

Nel caso che consideriamo, la curva d'intersezione del piano P non ha tangenti doppie. Tuttavia questo piano, essendo tangente alla superficie S (§ 12), contiene due generatrici della medesima. Ma, siccome de' tre piani osculatori passanti per ciascuna di esse, due coincidono nel piano stazionario, così esse non sono tangenti doppie, ma tangenti ordinarie della curva d'intersezione.

Il punto g , ove la curva K ha un contatto del terz'ordine col piano stazionario P , è anche un punto della curva doppia D . Ed inverò: nel punto g tre tangenti suc-

cessive della curva K sono sovrapposte; quindi il punto g , come intersezione della prima colla terza tangente, appartiene alla curva doppia.

La generatrice d'inflexione G , dopo aver toccata la curva del terz'ordine, sezione fatta dal piano P nella sviluppabile V , va a segarla in un altro punto h ; è questo il secondo punto, ove la curva D è incontrata dalla generatrice medesima; {e in esso la curva D sarà osculata dal piano P ; perchè, siccome G conta come tre rette nella sezione completa, così il punto h conterà come tre punti doppi della sezione completa medesima}.

Nel caso generale d'un piano osculatore qualsivoglia (§ 13), questo sega la curva D in due punti situati nella generatrice posta in quel piano. Ma quando il piano osculatore è lo stazionario P , uno di que' due punti va a riunirsi con g ; cioè il piano stazionario oscula la curva doppia in h , la tocca semplicemente in g , e la sega inoltre in un terzo punto, fuori della retta G . È quest'ultimo l'unico punto doppio, che abbiamo superiormente trovato nella curva di terz'ordine, sezione della sviluppabile V .

Dunque:

I punti in cui la curva K è toccata dai suoi quattro piani osculatori stazionari sono anche punti della curva D . In essi, i piani stazionari della curva K sono tangenti alla curva D . [39]

È poi facilissimo persuadersi che i quattro punti anzidetti sono anche quelli, ove i piani stazionari toccano la superficie di secondo grado S e quella superficie di terza classe che è involupata dai piani seganti armonicamente la curva K .

§ 15.

Oltre i punti di contatto de' quattro piani stazionari, le curve K e D hanno in comune i quattro punti t' , ove la prima curva è segata dalle quattro tangenti T generatrici dell'iperboloide I (§ 11). Anzi, questi ultimi sono punti stazionari della curva D . Infatti: in t' concorrono tre tangenti di K , cioè la tangente in t' , la tangente nel punto successivo (infinitamente vicino) a t' e la tangente (T) in t . I punti, in cui le prime due tangenti incontrano la terza appartengono alla curva D , in virtù della definizione di questa curva; dunque, t' rappresenta due punti successivi della curva D , ossia è un punto stazionario della medesima.

La curva D incontra l'iperboloide I ne' quattro punti di contatto della curva K coi piani stazionari e nei quattro punti t' . Ciascuno di questi ultimi conta come due intersezioni, perchè è un punto stazionario della curva doppia; dunque quegli otto

punti equivalgono a dodici intersezioni. Essendo la curva D del sest'ordine, non può avere altri punti comuni coll'iperboloide, epperò le due curve K e D hanno in comune solamente gli otto punti accennati.

Dunque:

*Le due curve K e D si segano in otto punti; cioè ne' punti di contatto della curva K co' suoi piani stazionari e ne' punti in cui questa curva è segata dalle sue quattro tangenti, situate sull'iperboloide I . Gli ultimi quattro punti sono stazionari per la curva D *).*

Un piano qualunque, condotto per uno de' punti stazionari t' , sega la curva D soltanto in altri quattro punti: dunque il cono, che ha il vertice in quel punto e passa per la curva D , è del quart'ordine. Per esso, le rette che uniscono quel punto stazionario agli altri tre, sono generatrici stazionarie. Ora, un cono di quart'ordine, dotato di tre generatrici stazionarie (cuspidali), non può avere alcun'altra generatrice multipla; dunque, la curva D non può avere, oltre i suoi quattro punti stazionari, altri punti multipli.

§ 16.

Passiamo ora a considerare i coni prospettivi alla data curva gobba K di quart'ordine e seconda specie.

Un punto o , preso ad arbitrio nello spazio, sia il vertice di un cono passante per la curva K . Questo cono è del quart'ordine, perchè ogni piano condotto per o , incontrando la curva K in quattro punti, sega il cono lungo le quattro rette che congiungono o a que' quattro punti.

Il cono è della sesta classe: infatti, ogni retta passante per o giace in sei piani tangenti alla curva K , epperò tangenti al cono medesimo (§ 11).

Il cono ha sei piani stazionari, tali essendo i sei piani osculatori, che da o si possono condurre alla curva data (§ 11).

Quindi, facendo nelle formole di PLÜCKER (le quali sussistono pei coni come per le linee piane) $m=4$, $m'=6$, se ne ricava $d=3$, $s=0$, $d'=4$. Che dovesse essere $s=0$, si poteva prevedere dalla mancanza di cuspidi nella curva K .

Dall'essere $d=3$ segue, che il nostro cono ha tre generatrici doppie; e siccome la curva K non ha punti doppi, così:

Per un punto qualunque dello spazio passano tre rette, ciascuna delle quali incontra la curva gobba di quart'ordine e seconda specie in due punti.

*) Nei quattro punti t' , le curve K e D hanno comuni i piani osculatori.

Essendo $d'=4$, il cono ha quattro piani tangenti doppi, ossia:

Per un punto qualunque dello spazio passano quattro piani, ciascuno de' quali contiene due rette tangenti della curva gobba di quart' ordine e seconda specie.

Se il cono prospettivo vien segato da un piano qualunque non passante per o , si ha:

Posto l'occhio in un punto qualunque dello spazio, la prospettiva della curva K è una linea piana del quart' ordine e della sesta classe con tre punti doppi, quattro tangenti doppie e sei flessi.

Dalla teoria delle curve piane di quart' ordine dotate di tre punti doppi *) è noto: che le sei tangenti ne' tre punti doppi toccano una stessa conica; che le sei rette, passanti pei punti doppi e toccanti altrove la curva sono tangenti di una seconda conica; che gli otto punti di contatto delle quattro tangenti doppie sono in una terza conica; e che i tre punti doppi sono le intersezioni delle coppie di lati opposti d'un quadrangolo completo, circoscritto al quadrilatero completo formato dalle tangenti doppie. Dunque:

Per un punto arbitrariamente dato nello spazio, passano tre rette, ciascuna appoggiata in due punti alla curva K. *I piani tangenti alla curva ne' sei punti d'appoggio, condotti dal punto dato, toccano uno stesso cono di secondo grado. Gli altri sei piani tangenti della curva, che passano per quelle tre rette medesime, due per ciascuna, toccano un altro cono di secondo grado.*

Per un punto dato ad arbitrio nello spazio, passano quattro piani, ciascuno de' quali tocca la curva K in due punti distinti. *Le rette, che congiungono il punto dato agli otto punti di contatto, giacciono sopra uno stesso cono di second'ordine.*

Le tre rette, che dal punto dato ponno condursi ad incontrar due volte la curva K, sono le intersezioni delle coppie di facce opposte di un angolo quadrispigolo completo, circoscritto all'angolo tetraedro completo formato dai quattro piani tangenti doppi.

§ 17.

Se il punto o è preso sull'iperboloide I, le tre rette che incontrano due volte la curva gobba K riduconsi ad una sola, cioè alla generatrice dell'iperboloide appoggiata alla curva in tre punti. Quindi, se si pone l'occhio in quel punto, la prospettiva della curva K è una linea piana del quart' ordine dotata di un punto triplo.

Il punto o sia preso sopra una retta G , tangente alla curva K in un punto g .

*) CAYLEY, *Cambridge and Dub. Math. Journal*, vol. V, pag. 150. — *Journal de M. Liouville*, t. XV, pag. 352. — SALMON, *Higher plane curves*, Dublin 1852, pag. 201, 202.

Questa retta tien luogo di una delle tre, incontranti due volte la curva gobba; dunque, il cono prospettivo avrà due generatrici doppie ed una cuspidale. Il cono è ancora del quart' ordine, ma della quinta classe, perchè una retta, condotta ad arbitrio per o , incontra, oltre G , soltanto cinque tangenti della curva K .

Le formole di PLÜCKER danno poi $s'=4$ e $d'=2$; cioè, per o passano quattro piani osculatori e due piani doppiamente tangenti, oltre quelli che passano per la retta G .

Se il punto o è l'intersezione di due tangenti della curva K , il cono prospettivo avrà due generatrici cuspidali ed una doppia, epperò un piano tangente doppio e due piani stazionari. E, segandolo con un piano arbitrario, la prospettiva della curva K sarà una linea di quart' ordine e quarta classe, avente un punto doppio, due cuspidi, una tangente doppia e due flessi. Ora è noto *) che, in una tal curva, la retta che unisce i due flessi, quella che passa pei due cuspidi e la tangente doppia concorrono in uno stesso punto. E, pel principio di dualità, il punto d'incontro delle tangenti ne' cuspidi, quello comune alle due tangenti stazionarie ed il punto doppio sono in linea retta. Dunque:

Per un punto, che sia l'incontro di due tangenti della curva K passano: una retta appoggiata alla curva in due punti, due piani osculatori (oltre i due passanti per le tangenti date) ed un piano contenente due altre tangenti. Quest'ultimo piano, quello delle due tangenti date ed il piano determinato dal punto dato e dai punti di contatto de' due piani osculatori, passano per una medesima retta. La retta appoggiata alla curva in due punti, la retta intersezione de' due piani osculatori che passano per le tangenti date e la retta comune agli altri due osculatori giacciono in uno stesso piano.

Il punto o sia ora nella stessa curva K ; il cono prospettivo sarà del terz' ordine, perchè ogni piano, condotto pel punto o della curva, la sega in altri tre punti, epperò sega il cono lungo tre generatrici. La generatrice dell'iperboloide I passante per o ed appoggiata in altri due punti alla curva gobba, è una generatrice doppia del cono; questo è dunque della quarta classe. Cioè:

La prospettiva della curva K , quando l'occhio sia collocato sulla curva stessa, è, in generale, una linea del terz' ordine e della quarta classe.

Una linea piana del terz' ordine dotata di punto doppio ha, com'è notissimo, tre flessi in linea retta, e questa retta è la polare armonica del punto doppio, rispetto al triangolo formato dalle tangenti stazionarie. Dunque:

Da un dato punto qualunque della curva gobba di quart' ordine e seconda specie si possono condurre tre piani che la oscolino in altri punti. I tre punti di contatto ed il punto dato sono in uno stesso piano, il quale è, rispetto al triedro formato dai piani

*) SALMON, *Higher plane curves*, pag. 202.

osculatori, il polare armonico della retta che passa pel punto dato e sega in altri due punti la curva gobba.

Se l'occhio si pone in uno de' quattro punti t' (§ 11), il cono prospettivo avrà una generatrice cuspidale T, in luogo della generatrice doppia, epperò sarà della terza classe. Dunque:

Per la curva gobba di quart'ordine e seconda specie passano quattro coni di terz'ordine e terza classe.

§ 18.

Prima d'abbandonare l'argomento de' coni prospettivi alla curva K, ricerchiamo di quali linee si componga la completa intersezione di due coni, passanti per la curva ed aventi i vertici in due punti qualunque o, o' della medesima. I due coni sono del terz'ordine, epperò la loro completa intersezione dev'essere del nono ordine. Essi hanno in comune la curva gobba K e la retta oo' ; dunque si segheranno lungo un'altra curva del quart'ordine. È pur questa una curva di seconda specie, ovvero è dessa l'intersezione di due superficie di secondo grado?

Per risolvere il quesito, immagino la retta A, che passa per o e s'appoggia in altri due punti alla curva data, e per questa retta conduco un piano qualunque P, il quale incontrerà l'intersezione completa de' due coni in nove punti. La sezione fatta dal piano P, nel cono di vertice o' , è una linea del terz'ordine passante per o ; mentre l'altro cono è segato lungo la sua generatrice doppia A, e lungo un'altra retta uscente da o . Dunque, le sezioni de' due coni hanno, all'infuori della retta A, due soli punti comuni, uno de' quali sarà il quarto punto di segmento della curva K col piano P.

Da ciò segue che la seconda curva di quart'ordine, comune ai due coni, è incontrata da qualunque piano, passante per A, in un solo punto esterno a questa retta, cioè questa retta ha colla curva tre punti comuni. Dunque:

Due coni di terz'ordine, passanti per una curva gobba di quart'ordine e seconda specie, ed aventi i vertici su di essa, hanno in comune un'altra curva di quart'ordine e seconda specie, posta sopra un iperboloide, che passa per le due generatrici doppie dei coni.

Tuttavia, se i vertici o, o' de' due coni fossero situati sopra una retta A, incontrante la curva K in un terzo punto o'' , i coni avrebbero questa retta per generatrice doppia comune, il che equivale ad avere in comune una linea del quart'ordine. Inoltre, i due coni sono toccati lungo A da uno stesso piano, passante per la tangente in o'' alla curva K; dunque, in questo caso i due coni non possono avere alcun punto comune all'infuori della curva K e della retta A.

§ 19.

Il piano osculatore in un punto qualunque m della curva K sega questa curva in un altro punto m_1 . E nel punto m_1 concorrono, oltre il piano osculatore in m , i piani osculatori in altri due punti (§ 17). Dunque, ad ogni punto m_1 corrispondono tre punti m . Variando simultaneamente i punti m, m_1 sulla curva gobba, essi genereranno due serie proiettive: l'una formata di terne in involuzione, l'altra semplice.

Vi saranno dunque quattro punti m , ciascun de' quali coinciderà col corrispondente m_1 . Sono essi i quattro punti di contatto de' quattro piani stazionari (§ 13).

Vi saranno inoltre quattro punti m_1 , a ciascun de' quali corrisponderà un gruppo contenente due punti m coincidenti. I quattro punti doppi m dell'involuzione cubica sono i contatti t delle tangenti T generatrici dell'iperboloide I . I corrispondenti punti m_1 sono i quattro punti t' , ove le dette tangenti segano la curva K .

Di qual grado è la superficie, luogo della retta mm_1 ? Per questa superficie, la curva K è quadrupla, perchè dal punto m della curva, oltre mm_1 , partono altre tre generatrici della superficie; esse sono mm', mm'', mm''' , ove m', m'', m''' siano i punti di contatto de' tre piani osculatori, seganti la curva in m .

Sia A una retta qualunque, appoggiata alla curva K in tre punti; ogni piano, condotto per A , sega la nostra curva in un solo punto esterno a questa retta, quindi non può contenere alcuna generatrice della superficie, di cui si tratta, che non incontri A in uno de' suoi tre punti d'appoggio. Cioè, questi sono i soli punti in cui la superficie possa essere incontrata dalla retta A , e, siccome ciascuno d'essi è quadruplo, così la superficie richiesta è del dodicesimo grado. Essa contiene evidentemente le quattro tangenti T e le quattro tangenti situate ne' piani stazionari.

Analogamente si dimostra che la superficie, luogo delle rette $m''m''', m'''m', m'm''$, è del sesto grado e che, per essa, la curva K è doppia.

Abbiamo veduto altrove (§ 17) che i quattro punti m, m', m'', m''' sono in uno stesso piano. Quale è la classe della superficie, inviluppo di un tal piano?

Questa superficie non passa per la curva K , perchè i piani tangenti di quella non sono tangenti alla curva. Laonde, per conoscere la classe della superficie, basterà sapere quanti piani tangenti le si possono condurre da un punto qualunque m della curva K . Evidentemente due. Infatti, 1.° da m si possono condurre tre piani ad osculare la curva K in m', m'', m''' ; e questi tre punti determinano un piano, passante per m , che è tangente all'inviluppo richiesto; 2.° il piano osculatore in m sega la curva in m_1 ; da m_1 si possono condurre altri due piani osculatori, i punti di contatto de' quali sono, insieme con m ed m_1 , in un piano tangente all'inviluppo di cui si tratta. Da

m non si possono condurre altri piani tangenti; dunque l'inviluppo richiesto è della seconda classe, cioè:

Da un punto qualunque della curva K si possono condurre tre piani ad oscularla in altri punti. I punti di contatto determinano un piano, l'inviluppo del quale è un cono di secondo grado.

§ 20.

Per un punto qualunque dello spazio passano quattro piani doppiamente tangenti alla curva K (§ 16); dunque, i piani doppiamente tangenti di questa curva formano una sviluppabile W di quarta classe.

Siccome la curva K è situata nella sviluppabile W , così la generatrice di questa sviluppabile, posta in un suo piano tangente, dee passare pei punti in cui questo piano tocca la curva. Dunque, se m è un punto qualunque di K e se la tangente in m incontra le tangenti ne' punti m' , m'' della stessa curva (§ 13), le rette mm' , mm'' sono generatrici della sviluppabile W . E siccome, di tali generatrici, ne passano due per ogni punto della curva K , così questa è doppia per la sviluppabile anzidetta. Dunque:

La retta congiungente due punti della curva K , ove questa sia toccata da due tangenti situate in uno stesso piano, ha per luogo geometrico una sviluppabile W di quarta classe. Questa sviluppabile è doppiamente circoscritta alla curva K ; e viceversa questa è la curva doppia della sviluppabile W .

Le quattro tangenti T della curva K sono evidentemente generatrici della sviluppabile W , epperò rette comuni a questa superficie e all'iperboloide I . Così i piani doppiamente tangenti alla curva K (in t e t') e passanti per le rette medesime, sono piani tangenti comuni alle superficie W ed I . Queste superficie, essendo l'una della quarta classe e l'altra della seconda, devono avere otto piani tangenti comuni; ed infatti, ciascuno dei quattro suindicati conta per due, perchè in esso le due superficie hanno una generatrice comune.

Siccome le generatrici della superficie W sono rette incontranti due volte la curva K , così esse non possono incontrare l'iperboloide I , fuori di questa curva. Dunque, la completa intersezione delle due superficie W ed I consta delle quattro generatrici T e della curva K , la quale è da contarsi due volte, perchè è doppia sulla sviluppabile W . Ne segue che la completa intersezione delle due superficie è del dodicesimo ordine, cioè:

La sviluppabile W , doppiamente circoscritta alla curva K , è del sesto ordine.

Tagliando la sviluppabile W con un piano arbitrario, la sezione sarà una linea del sest'ordine e della quarta classe, con quattro punti doppi. Dunque, per le formole

di PLÜCKER, avrà sei cuspidi, nessun flesso, e tre tangenti doppie. Ossia, *la curva cuspidale H della sviluppabile W è del sest'ordine*; questa sviluppabile non ha generatrici d'inflessione; ed un piano qualunque contiene tre rette, ciascuna delle quali è l'intersezione di due piani doppiamente tangenti alla curva K *).

Se la superficie W vien segata da un suo piano tangente, la sezione è una linea di quart'ordine e terza classe, dotata di una tangente doppia. Questa retta è dunque l'intersezione di tre piani tangenti. Cioè, vi sono infinite rette, per ciascuna delle quali passano tre piani tangenti di W, cioè tre piani doppiamente tangenti a K. Ciò basta per concludere (§ 3) che *la sviluppabile di quarta classe W è di seconda specie*, cioè che *la sviluppabile W è circonscritta ad un unico iperboloide, avente per generatrici di un medesimo sistema le rette, per le quali passano tre piani doppiamente tangenti alla curva K*.

Da ciò consegue che le proprietà della sviluppabile W si possono, in virtù del principio di dualità, concludere immediatamente da quelle della curva K.

Per esempio: come la sviluppabile V, osculatrice della curva K, è circonscritta ad una superficie di secondo grado, per ogni generatrice della quale passano tre piani tangenti di quella, così *la curva H, cuspidale della superficie W, sarà situata sopra una superficie di second'ordine, ogni generatrice della quale (d'entrambi i sistemi) incontrerà la curva in tre punti*.

La sviluppabile V ha quattro piani tangenti stazionari; dunque *la curva H ha quattro punti stazionari*.

Il piano, che sega la curva K in un suo punto qualunque m ed in altri tre punti, i cui piani osculatori concorrano in m , involupa un cono di secondo grado (§ 19); dunque:

Ogni piano doppiamente tangente alla curva K, epperò osculatore alla curva H, sega quest'ultima in tre punti. I piani osculatori ad H, in questi punti, concorrono in un punto del primo piano. Il luogo di quest'ultimo punto è una curva di secondo grado.

Ecc. ecc.

§ 21.

In ogni punto della curva D (§ 13) concorrono due rette tangenti della curva K, epperò anche due piani che ivi toccano la sviluppabile V. La tangente in quel punto, alla curva D, deve trovarsi in entrambi i piani, epperò è la loro intersezione; dunque:

*) La sviluppabile W non può ammettere un piano tangente doppio, cioè un piano che la tocchi lungo due generatrici distinte: infatti, un tal piano toccherebbe la curva K in tre punti distinti, il che è impossibile.

Se m, m' sono due punti della curva K , ove questa sia toccata da due rette situate in uno stesso piano, la retta comune intersezione dei piani osculatori alla detta curva in m, m' è tangente alla curva D , nel punto ove s'incontrano le due tangenti di K .

Per conoscere l'ordine e la classe della sviluppabile, formata dalle tangenti della curva D , ricordiamo che questa è del sest'ordine, ha quattro punti stazionari e nessun punto doppio (§ 15) ed è doppiamente toccata dai piani osculatori della curva K . Dunque, un cono prospettivo alla curva D , preso il vertice arbitrariamente nello spazio, sarà del sest'ordine ed avrà quattro generatrici cuspidali e sei piani tangenti doppi. Onde, fatto nelle formole di PLÜCKER $m=d'=6$, $s=4$, ricaviamo $m'=d=6$, $s'=4$. Cioè:

La sviluppabile osculatrice della curva D è della quarta classe e del sest'ordine.

Questa sviluppabile non può avere un piano doppiamente tangente. Se ne avesse uno, esso sarebbe anche un piano tangente alla sviluppabile V , cioè osculerebbe D in due punti e K in un punto: e questi tre punti sarebbero situati sopra una stessa retta, tangente a K . Quindi, quel piano segherebbe la sviluppabile V lungo una linea del quart'ordine, che avrebbe due punti multipli ed un punto ordinario sopra una stessa retta tangente nel punto ordinario; il che è manifestamente assurdo.

Ciò premesso, se noi tagliamo la sviluppabile osculatrice della curva D con un suo piano tangente, la sezione sarà una curva di quart'ordine e terza classe con tre cuspidi; epperò vi sarà una tangente doppia. Questa, non potendo corrispondere ad un piano doppiamente tangente, sarà l'intersezione di altri due piani tangenti, oltre quello che si considera. Vi sono pertanto infinite rette, ciascuna delle quali è l'intersezione di tre piani osculatori della curva D ; ossia, *la sviluppabile osculatrice di questa curva è di quarta classe e seconda specie, epperò circoscritta ad un solo iperboloide*, sul quale sono situate le rette per le quali passano tre piani osculatori di D .

Perciò, anche *la curva D è situata sopra una superficie di second'ordine*, ciascuna generatrice della quale (in entrambi i sistemi) incontra la curva tre volte.

Appare così manifesto che la curva D è affatto analoga alla curva H .

Io non protrarrò oltre queste ricerche, cui sarà agevole allo studioso lettore continuare quanto gli piaccia. Il quale avrà certamente notato le intime e scambievoli relazioni che esistono e si riproducono fra curve di quarto e sesto ordine e sviluppabili di quarta e sesta classe, i tipi delle quali sono K, D, W, V . Ciascuna di queste curve esiste sopra una sola superficie di secondo grado; e così pure ciascuna di quelle sviluppabili è circoscritta ad una sola superficie dello stesso grado. Le altre curve e sviluppabili che si ricavano da quelle quattro riduconsi agli stessi tipi. Infatti: la curva cuspidale di W è analoga a D ; la sviluppabile osculatrice di D è analoga a W , e per conseguenza ha una curva doppia analoga a K ; ecc.

Anzi, quei quattro tipi sono riducibili a due soli K e D ; giacchè W e V corrispon-

dono a quelli, pel principio di dualità ossia di derivazione polare. Abbiamo già veduto qual sia la definizione della curva K. In quanto a D, siccome questa curva esiste sopra una superficie di second'ordine ed ha quattro punti stazionari, così potrà definirsi: *la curva d'intersezione di una superficie di second'ordine e di una superficie del terzo, aventi fra loro un contatto stazionario in quattro punti* *).

*) Quando due superficie si toccano in un punto, questo è *doppio* per la curva d'intersezione delle due superficie. Se le due tangenti alla curva nel punto doppio coincidono, cioè, se questo diviene un cuspid, il contatto delle due superficie dicesi *stazionario* (*Camb. and Dublin Math. Journal*, vol. V, pag. 30-31).
