30.

COURBES GAUCHES DÉCRITES SUR LA SURFACE D'UN HYPERBOLOÏDE À UNE NAPPE *).

Annali di Matematica pura ed applicata, serie I, tomo IV (1861), pp. 22-25.

I. Courbes gauches d'ordre impair décrites sur la surface d'un hyperboloïde à une nappe.

1. Étant donnés trois faisceaux homographiques, c'est-à-dire deux faisceaux de plans passant par deux droites A, B, respectivement, et un faisceau de surfaces de l'ordre m, les points où la droite intersection de deux plans homologues rencontre la surface correspondante de l'ordre m, engendrent une courbe gauche C de l'ordre $2m+1$. Elle est entièrement située sur la surface de l'hyperboloïde I engendré par les deux faisceaux de plans (Théorème de M. Chasles, *Compte rendu* du 3 juin 1861).

2. *Toute génératrice de l'hyperboloïde* I, *du système auquel appartiennent les axes* A, B, *rencontre la courbe* C *en* $m+1$ *points; et toute génératrice du second système rencontre* C *en* m *points.*

3. *Il y a* $2m^2$ *génératrices du premier système et* $2(m^2-1)$ *génératrices du second qui sont tangentes à la courbe* C.

4. *La surface réglée dont les génératrices s'appuient chacune en deux points sur la courbe* C *et en un point sur une droite* L *est de l'ordre* $m(3m+1)$; C *est une ligne multiple suivant* $2m$, *et* L *est multiple suivant* m^2.

Si L *a un point commun avec* C, *la surface de l'ordre* $m(3m+1)$ *se décompose en un cône de l'ordre* $2m$ *et en une surface réglée de l'ordre* $m(3m-1)$; *pour celle-ci* L *est multiple suivant* m^2, *et* C *suivant* $2m-1$.

Si L *a deux points communs avec* C, *on a deux cônes de l'ordre* $2m$ *et une surface gauche de l'ordre* $3m(m-1)$, *pour laquelle* L *est multiple suivant* m^2-1, *et* C *suivant* $2(m-1)$.

---

*) Extrait des *Comptes rendus* des séances de l'Académie des sciences; séance du 24 juin 1861 [tome 52, pp. 1319-1323].

5. *Par un point quelconque de l'espace on peut mener:* 1.° m^2 *droites qui rencontrent deux fois la courbe* C; 2.° $3(2m^2-1)$ *plans osculateurs à la courbe* C; 3.° *un nombre* $2(m-1)(m^3+3m^2-m-2)$ *de plans, dont chacun contient deux tangentes de la courbe* C.

6. *Par une droite quelconque on peut mener* $2m(m+1)$ *plans tangents à la courbe* C.

7. *Un plan quelconque contient:* 1.° $2m(m^2-1)(m+2)$ *points, dont chacun est l'intersection de deux tangentes de la courbe* C; 2.° $18m^4-40m^2+5m+18$ *droites, dont chacune est l'intersection de deux plans osculateurs de la courbe* C.

8. Il suit de là que:

La perspective de la courbe C *est une courbe de l'ordre* $2m+1$, *et de la classe* $2m(m+1)$, *ayant* m^2 *points doubles,* $3(2m^2-1)$ *inflexions, et* $2(m-1)(m^3+3m^2-m-2)$ *tangentes doubles.*

9. *Les droites tangentes de la courbe* C *forment une développable* S *de l'ordre* $2m(m+1)$ *et de la classe* $3(2m^2-1)$, *ayant* $4(m-1)(3m+2)$ *génératrices d'inflexion.*

10. *Toute droite tangente à la courbe* C, *en un point, rencontre* $2(m-1)(m+2)$ *droites qui sont tangentes à la même courbe en d'autres points. Les points où se rencontrent ces tangentes non consécutives forment une courbe gauche* K *qui est double (courbe nodale) sur la développable* S. *Les plans déterminés par les couples de tangentes non consécutives de* C *qui se coupent, enveloppent une développable* Σ *qui est doublement tangente à la courbe* C. Il suit des n^{os} 5 et 7 que *la développable* Σ *est de la classe* $2(m-1)(m^3+3m^2-m-2)$, *et que la courbe* K *est de l'ordre* $2m(m^2-1)(m+2)$.

11. On peut déduire ces propriétés, et d'autres encore, des formules générales données par M. Cayley (*Journal de Liouville*, t. X).

II. Nouvelles courbes gauches de tous les ordres sur la surface d'un hyperboloïde à une nappe.

12. On donne trois faisceaux de plans, dont les axes soient trois droites P, Q, R. Le faisceau P soit composé d'un nombre infini de groupes, dont chacun contient m plans. Ces groupes sont supposés en involution de l'ordre m *), c'est-à-dire, un quelconque des m plans d'un groupe détermine les autres $m-1$ plans du même groupe. (Pour $m=2$ on a l'involution ordinaire). Le deuxième faisceau soit homographique au premier, c'est-à-dire les plans de ces faisceaux se correspondent, un à un, entre eux.

*) De Jonquières, *Généralisation de la théorie de l'involution* (*Annali di Matematica*, Roma, 1859).

Et les plans du faisceau R correspondent anharmoniquement, un par fois, aux groupes du faisceau P (et par conséquent aux groupes de Q) *).

Le lieu des intersections des plans correspondants des trois faisceaux est une courbe gauche C *de l'ordre* $m+2$ *qui coupe* $m+1$ *fois chacune des droites* P *et* Q, *et deux fois la droit* R. *Cette courbe* C *est située entièrement sur l'hyperboloïde* I *engendré par les deux faisceaux* P *et* Q.

Pour $m=1$ on a la cubique gauche, et on tombe dans la construction donnée par M. CHASLES (*Compte rendu* du 10 août 1857). Pour $m=2$ on a la courbe du quatrième ordre étudiée par M. SALMON (*Cambridge and Dublin Math. Journal*, vol. V); j'en ai donné la construction dans mon Mémoire *Sulle superficie gobbe del terz' ordine* (*Atti dell'Istituto Lombardo*, t. II).

Hormis le cas de la cubiche gauche ($m=1$), l'hyperboloïde I est la seule surface du second ordre qui passe par la courbe C.

13. *Toute génératrice de l'hyperboloïde* I, *du système auquel appartiennent les axes* P, Q, *rencontre la courbe* C *en* $m+1$ *points; et toute génératrice de l'autre système rencontre cette courbe en un seul point.*

14. Les faisceaux P et R (de même que Q et R) engendrent une surface gauche de l'ordre $m+1$, dont l'axe P est une ligne multiple suivant le nombre m.

15. *Par la courbe* C, *par une génératrice du premier système de l'hyperboloïde* I, *et par une droite qui s'appuie en deux points sur* C, *on peut faire passer une surface gauche de l'ordre* $m+1$, *dont la première directrice rectiligne est une ligne multiple suivant* m.

16. *Si l'hyperboloïde* I *et* $2m+3$ *de ses points sont donnés, on peut décrire par ces points, sur la surface* I, *deux courbes* C.

17. *Si autour de deux génératrices du premier systéme de l'hyperboloïde* I *on fait tourner deux plans qui se rencontrent sur la courbe* C, *ces plans engendrent deux faisceaux homographiques.*

18. *Il y a* $2m$ *génératrices du premier système de l'hyperboloïde* I *qui sont tangentes à la courbe* C.

19. *Le lieu d'une droite mobile qui s'appuie en deux points sur la courbe* C *et en un point sur une droite fixe* L, *est une surface de l'ordre* $(m+1)^2$. *Les lignes* C *et* L *sont multiples suivant les nombres* $m+1$ *et* $\frac{m(m+1)}{2}$ *respectivement.*

---

*) Si l'on représente un plan quelconque du premier faisceau par $P+\lambda P'=0$ et les plans correspondants des autres faisceaux par $Q+\mu Q'=0$, $R+\nu R'=0$, on aura entre λ, μ, ν deux relations de la forme:

$$(a+b\lambda)\mu+a'+b'\lambda=0, \quad (c\lambda^m+d\lambda^{m-1}+\ldots)\nu+c'\lambda^m+d'\lambda^{m-1}+\ldots=0.$$

20. *Quand deux courbes* C *tracées sur un même hyperboloïde rencontrent chacune en* $m+1$ *points une même génératrice, ces deux courbes se rencontrent en* $2(m+1)$ *points. Et quand les deux courbes rencontrent l'une en* $m+1$ *points et l'autre en un seul point une même génératrice, elles se rencontrent en* m^2+2m+2 *points.*

21. *Par un point quelconque de l'espace on peut mener:* 1.° $\frac{m(m+1)}{2}$ *droites qui rencontrent la courbe* C *chacune en deux points;* 2.° $3m$ *plans osculateurs à la courbe* C; 3.° $2m(m-1)$ *plans, dont chacun contient deux droites tangentes à* C.

22. *Par une droite quelconque on peut mener* $2(m+1)$ *plans tangent à la courbe* C.

23. *Un plan quelconque contient:* 1.° $2(m^2-1)$ *points dont chacun est l'intersection de deux tangentes de la courbe* C; 2.° $\frac{1}{2}(9m^2-17m+10)$ *droites dont chacune est l'intersection de deux plans osculateurs de la courbe* C.

24. Il suit de ces théorèmes que:

La perspective de la courbe C *est, en général, une courbe de l'ordre* $m+2$ *et de la classe* $2(m+1)$, *ayant* $\frac{m(m+1)}{2}$ *pointes doubles,* $3m$ *inflexions et* $2m(m-1)$ *tangentes doubles.*

Mais si l'œil est placé sur la courbe C, sa perspective est une courbe de l'ordre $m+1$ et de la classe $2m$, ayant un point multiple suivant m, $3(m-1)$ inflexions, et $2(m-1)(m-2)$ tangentes doubles.

25. *Les droites tangentes à la courbe* C *forment une développable* S *de l'ordre* $2(m+1)$ *et de la classe* $3m$, *avec* $4(m-1)$ *génératrices d'inflexion.*

26. *Toute droite tangente en un point de la courbe* C *rencontre* $2(m-1)$ *droites qui sont tangentes à la même courbe en d'autres points. Les points où se rencontrent deux à deux les tangentes* (non consécutives) *de* C *forment, sur la développable* S, *une courbe double* K *de l'ordre* $2(m^2-1)$. *Et les plans où se rencontrent ces mêmes tangentes, enveloppent une développable* Σ, *de la classe* $2m(m-1)$, *qui est doublement tangente à la courbe* C.

27. *Les courbes* C *et* K *ont en commun:* 1.° *les* $4(m-1)$ *points où* C *est touchée par les génératrices d'inflexion de* S; 2.° *les* $2m(m-1)$ *points où* C *est coupée par les génératrices de l'hyperboloïde* I *qui sont tangentes à* C (n. 18). *Ces derniers points sont des points stationnaires pour la courbe* K.

28. *Il y a, sur la courbe* K, $\frac{4}{3}m(m-1)(m-2)$ *points (doubles), où se coupent trois tangentes de* C; *et il y a* $\frac{4}{3}(m-1)(m-2)(m-3)$ *plans* (*tangents doubles de* Σ), *dont chacun contient trois tangentes de* C.

Etc., etc.

29. Ces résultats font voir que la courbe C est réciproque d'une certaine surface développable, dont MM. CAYLEY et SALMON se sont occupés plusieurs fois *). Autrement: l'équation, en coordonnées tangentielles, de notre courbe C est le discriminant d'une équation de la forme

$$at^{m+2}+(m+2)bt^{m+1}+\frac{(m+2)(m+1)}{2}ct^{m}+\ldots=0,$$

où $a, b, c, \ldots$ sont des expressions linéaires des coordonnées, et t est la quantité qu'il faut éliminer.

---

*) *Journal de Crelle,* t. XXXIV, p. 148; *Cambridge and Dublin Mathematical Journal,* vol. III, p. 169; vol. V, p. 152.