15.

SOLUTION DE LA QUESTION 465. [21]

Nouvelles Annales de Mathématiques, 1.re série, tome XIX (1860), pp. 151-153.

Soient $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, n quantités quelconques; α une racine primitive de l'équation binôme

$$x^n - 1 = 0$$

et

$$\theta_r = a_0 + a_1 \alpha_r + a_2 \alpha_r^2 + \ldots + a_{n-1} \alpha_r^{n-1}$$

en supposant $\alpha_r = \alpha^r$.

Multiplions entre eux les deux déterminants

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_0 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{n-1} \\ 1 & \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_{n-1}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \ldots & \alpha_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

En exécutant la multiplication par lignes, les colonnes du déterminant produit deviennent divisibles respectivement par $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$, et l'on a

$$\mathrm{D}\Delta = \theta_1 \theta_2 \ldots \theta_n \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-1}^2 & \ldots & \alpha_{n-1}^{n-1} \\ 1 & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-2}^2 & \ldots & \alpha_{n-2}^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Or le déterminant du second membre est évidemment égal à $(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\Delta$ [22]; donc

$$\mathrm{D} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \theta_1 \theta_2 \ldots \theta_n .$$

Le théorème, mentionné par M. Michael Roberts (*Nouvelles Annales*, cahier de mars 1859, p. 87), est de M. Spottiswoode (*Journal* de Crelle, t. LI); la démonstration ci-dessus m'a été communiquée par M. Brioschi, et je l'ai publiée comme lemme dans une petite Note *Intorno ad un teorema di* Abel (*Annali* di Tortolini, 1856) [Memoria 2 di questo volume].

En supposant

$$a_r = a + rd ,$$

il s'ensuit

$$\theta_r = \frac{nd}{\alpha_r - 1} \qquad \text{pour} \qquad r = 1, 2, \ldots, n-1$$

et

$$\theta_n = na + \frac{n(n-1)}{2} d;$$

donc

$$\theta_1 \theta_2 \ldots \theta_{n-1} = (-1)^{n-1} n^{n-2} d^{n-1},$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} a & a+d & \ldots & a+(n-1)d \\ a+d & a+2d & \ldots & a \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a+(n-1)d & a & \ldots & a+(n-2)d \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (nd)^{n-1} \left[a + \frac{(n-1)d}{2}\right],$$

ce qui est bien la question 465.