# 14.

## SOLUTION DE LA QUESTION 464. [21]

*Nouvelles Annales de Mathématiques,* 1.re série, tome XIX (1860), pp. 149-151.

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les distances d'un point quelconque à quatre plans donnés; il est évident que l'équation la plus générale d'une surface du second ordre circonscrite au tétraèdre formé par les quatre plans

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0$$

sera

$$l\beta\gamma + m\gamma\alpha + n\alpha\beta + \lambda\alpha\delta + \mu\beta\delta + \nu\gamma\delta = 0.$$

Cette surface est coupée par le plan $\delta = 0$ suivant la conique

$$l\beta\gamma + m\gamma\alpha + n\alpha\beta = 0.$$

Soient $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ les distances d'un point quelconque du plan $\delta = 0$ aux côtés du triangle $\delta = 0$ $(\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0)$: triangle formé par l'intersection du plan $\delta$ avec les plans $\alpha, \beta, \gamma$; on a

$$\alpha = \alpha' \sin \alpha\delta, \quad \beta = \beta' \sin \beta\delta, \quad \gamma = \gamma' \sin \gamma\delta,$$

où $\alpha\delta$ est l'angle des plans $\alpha = \delta = 0$, etc. Donc l'équation de la conique rapportée au triangle inscrit sera

$$\frac{l}{\alpha' \sin \alpha\delta} + \frac{m}{\beta' \sin \beta\delta} + \frac{n}{\gamma' \sin \gamma\delta} = 0. \qquad \text{(Salmon)}$$

Les angles du triangle sont $\beta\delta\gamma$, $\gamma\delta\alpha$, $\alpha\delta\beta$, où $\beta\delta\gamma$ *) exprime l'angle que fait l'in-

*) $\beta\delta\gamma$ est l'angle qui, dans l'énoncé de la question, a été désigné par $(\beta\delta, \gamma\delta)$. P. [Prouhet]

tersection des faces $\beta = \delta = 0$ avec l'intersection des faces $\gamma = \delta = 0$. On sait que la conique représentée par l'équation ci-dessus est une circonférence, si l'on a

$$l : m : n = \sin\alpha\delta . \sin\beta\delta\gamma : \sin\beta\delta . \sin\gamma\delta\alpha : \sin\gamma\delta . \sin\alpha\delta\beta . \qquad \text{(Salmon)}$$

De même, si les plans $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ coupent la surface suivant des circonférences, on aura

$$l : \mu : \nu = \sin\delta\alpha . \sin\beta\alpha\gamma : \sin\gamma\alpha . \sin\delta\alpha\beta : \sin\beta\alpha . \sin\gamma\alpha\delta ,$$

$$m : \nu : \lambda = \sin\delta\beta . \sin\gamma\beta\alpha : \sin\alpha\beta . \sin\delta\beta\gamma : \sin\gamma\beta . \sin\alpha\beta\delta ,$$

$$n : \lambda : \mu = \sin\delta\gamma . \sin\alpha\gamma\beta : \sin\beta\gamma . \sin\delta\gamma\alpha : \sin\alpha\gamma . \sin\beta\gamma\delta .$$

De là on tire immédiatement que $l, m, n, \lambda, \mu, \nu$ sont proportionnelles aux quantités

$$\frac{\sin\alpha\delta}{\sin\beta\gamma}\sin\beta\alpha\gamma . \sin\beta\delta\gamma , \quad \frac{\sin\beta\delta}{\sin\gamma\alpha}\sin\gamma\beta\alpha . \sin\gamma\delta\alpha , \quad \frac{\sin\gamma\delta}{\sin\alpha\beta}\sin\alpha\gamma\beta . \sin\alpha\delta\beta ,$$

$$\frac{\sin\beta\gamma}{\sin\alpha\delta}\sin\alpha\beta\delta . \sin\alpha\gamma\delta , \quad \frac{\sin\gamma\alpha}{\sin\beta\delta}\sin\beta\gamma\delta . \sin\beta\alpha\delta , \quad \frac{\sin\alpha\beta}{\sin\gamma\delta}\sin\gamma\alpha\delta . \sin\gamma\beta\delta ,$$

ce qui démontre le thèorème de M. Prouhet.