18.

SOPRA UN PROBLEMA GENERALE DI GEOMETRIA.

Annali di Matematica pura ed applicata, serie I, tomo III (1860), pp. 169-171.

1. Nel fascicolo di gennaio 1860 del periodico: *Nouvelles Annales de Mathématiques* del sig. TERQUEM, a pag. 43, trovasi enunciato un problema, caso particolarissimo del seguente:

Data una retta OA, un punto O in essa ed un punto B fuori della medesima, trovare una curva (nel piano OAB) tale che conducendo una sua tangente qualsivoglia, e per B la parallela a questa, i segmenti della OA intercetti fra queste rette e il punto O siano legati da una data relazione algebrica del grado n.

Siano OM, ON i due segmenti compresi il primo fra il punto O e una tangente qualunque della curva, il secondo fra O e la parallela alla tangente. Sia:

$$\mathrm{F}\,(\mathrm{OM}, \mathrm{ON}) = 0$$

la relazione data. Posto $\mathrm{OB} = b$ ed assunte le rette OA, OB per assi delle coordinate rettilinee y, x avremo:

$$\mathrm{OM} = y - x\frac{dy}{dx}, \qquad \mathrm{ON} = -b\frac{dy}{dx},$$

ove x, y sono le coordinate del punto di contatto. Arriviamo così all'equazione alle derivate:

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{F}\left(y - x\frac{dy}{dx}, \quad -b\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

la primitiva singolare della quale sarà evidentemente l'equazione della curva domandata.

Ma questa curva può essere ottenuta anche senza ricorrere alle derivate. Infatti, siano u, v le coordinate tangenziali della retta tangente la curva, cioè siano $-\frac{1}{u}$, $-\frac{1}{v}$

i segmenti degli assi OB, OA compresi fra l'origine O e la tangente suddetta. Avremo:

$$\mathrm{OM} = -\frac{1}{v}, \qquad \mathrm{ON} = \frac{bu}{v}$$

quindi:

$$\mathrm{F}\left(-\frac{1}{v}, \frac{bu}{v}\right) = 0 \tag{2}$$

sarà l'equazione in coordinate tangenziali della curva domandata. Resta a dedurne l'equazione in coordinate cartesiane. A tale uopo, osservo che l'equazione in coordinate tangenziali del punto di contatto della tangente (u, v) è:

$$ux + vy + 1 = 0 \tag{3}$$

e che la richiesta equazione cartesiana della curva sarà la condizione, che il punto (x, y) appartenga alla curva. Rendo omogenea in u, v la (2) mediante la (3), onde avrò:

$$\mathrm{F}\left(\frac{ux + vy}{v}, \frac{bu}{v}\right) = 0 .$$

Le radici di questa equazione sono i valori del rapporto $u : v$ corrispondenti a tutte le tangenti della curva che passano pel punto (x, y): dunque l'equazione cartesiana della curva sarà la condizione che l'equazione precedente abbia due radici eguali, ossia avrà per primo membro il discriminante della funzione omogenea in u, v:

$$\mathrm{F}\left(\frac{ux + vy}{v}, \frac{bu}{v}\right).$$

Sia $\Delta(x, y)$ questo discriminante: sarà:

$$\Delta(x, y) = 0$$

la primitiva singolare della (1), mentre la primitiva completa è data da una tangente qualunque della curva, cioè è la (3) ove i parametri u, v sono legati dalla condizione (2).

La curva domandata è dunque algebrica della classe n (e dell'ordine $n(n-1)$).

Siccome l'equazione (3) si può desumere dall'eliminazione di $\frac{dy}{dx}$ fra le due:

$$y - x\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{v}, \qquad -\frac{dy}{dx} = \frac{u}{v}$$

così è manifesto che il precedente processo geometrico d'integrazione coincide col notissimo di Lagrange.

2. L'analogo problema nello spazio è il seguente:

Data una retta OA, un punto O in essa, e due punti B, C fuori di essa, trovare una superficie tale che conducendo un suo piano tangente qualunque, e per B e C i piani ad esso paralleli, i segmenti di OA intercetti fra questi piani e il punto O abbiano fra loro una data relazione algebrica del grado n.

Siano OL, OM, ON i tre segmenti anzidetti, e sia:

$$\mathrm{F}(\mathrm{OL}, \mathrm{OM}, \mathrm{ON}) = 0$$

la relazione data. Assumo OA, OB, OC per assi delle coordinate rettilinee x, y, z; posto $\mathrm{OB} = b$, $\mathrm{OC} = c$, avremo:

$$\mathrm{OL} = x - y\frac{dx}{dy} - z\frac{dx}{dz}, \quad \mathrm{OM} = -b\frac{dx}{dy}, \quad \mathrm{ON} = -c\frac{dx}{dz}$$

ove x, y, z sono le coordinate del punto di contatto del piano tangente che si considera. Avremo dunque l'equazione alle derivate parziali:

$$\mathrm{F}\left(x - y\frac{dx}{dy} - z\frac{dx}{dz}, \quad -b\frac{dx}{dy}, \quad -c\frac{dx}{dz}\right) = 0 \tag{1}$$

la primitiva singolare della quale sarà l'equazione della superficie domandata.

Siano u, v, w le coordinate tangenziali del piano tangente la superficie, cioè siano $-\frac{1}{u}, -\frac{1}{v}, -\frac{1}{w}$ i segmenti degli assi compresi fra questo piano e l'origine. Avremo:

$$\mathrm{OL} = -\frac{1}{u}, \quad \mathrm{OM} = \frac{bv}{u}, \quad \mathrm{ON} = \frac{cw}{u}$$

epperò:

$$\mathrm{F}\left(-\frac{1}{u}, \frac{bv}{u}, \frac{cw}{u}\right) = 0 \tag{2}$$

sarà l'equazione in coordinate tangenziali della superficie domandata.

L'equazione in coordinate tangenziali del punto di contatto del piano (u, v, w) è:

$$ux + vy + wz + 1 = 0. \tag{3}$$

Per esprimere la condizione che il punto (x, y, z) appartenga alla superficie, rendo la (2) omogenea in u, v, w mediante la (3); si avrà:

$$\mathrm{F}\left(\frac{ux + vy + wz}{u}, \frac{bv}{u}, \frac{cw}{u}\right) = 0.$$

Questa equazione rappresenta, insieme colla (3), la superficie conica inviluppo de' piani tangenti condotti alla superficie (2) dal punto (3). Se questo punto appartiene alla superficie (2), quel cono avrà un piano tangente doppio; epperò l'equazione in coordinate x, y, z della superficie domandata avrà per primo membro il discriminante della funzione omogenea in u, v, w:

$$\mathrm{F}\left(\frac{ux+vy+wz}{u}, \frac{bv}{u}, \frac{cw}{u}\right).$$

Sia $\Delta(x, y, z)$ questo discriminante; sarà:

$$\Delta(x, y, z) = 0$$

la primitiva singolare della (1). La primitiva completa è evidentemente somministrata da un piano tangente qualsivoglia della superficie, cioè è la (3), ove i parametri arbitrari u, v, w siano legati dalla condizione (2).

La superficie domandata è dunque algebrica della classe n (e dell'ordine $n(n-1)^2$).

L'equazione (3) si ottiene eliminando $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}$ fra le tre:

$$x - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - z\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} = -\frac{1}{u}, \qquad -\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{v}{u}, \qquad -\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} = \frac{w}{u},$$

epperò il metodo geometrico seguito nella precedente integrazione coincide coll'analitico usato ordinariamente.

Milano, 1.° giugno 1860.