

INTORNO AD UNA PROPRIETÀ DELLE SUPERFICIE CURVE,
 CHE COMPRENDE IN SÈ COME CASO PARTICOLARE
 IL TEOREMA DI *DUPIN* SULLE TANGENTI CONIUGATE.

Annali di Matematica pura ed applicata, serie I, tomo III (1860), pp. 325-335.

È notissimo che col nome di *tangenti coniugate* si designano due rette toccanti una data superficie in uno stesso punto, quando ciascuna di esse è generatrice di una superficie sviluppabile circoscritta alla data lungo una linea a cui sia tangente l'altra. Le proprietà delle tangenti coniugate sono dovute al *DUPIN*, l'autore dei *Développements de géométrie*.

L'illustre *BORDONI*, in una breve *nota* che fa seguito all'importante memoria *sulle figure isoperimetre esistenti in una superficie qualsivoglia* *), ha dimostrato una formola generale che comprende in sè, come caso particolarissimo, la proprietà fondamentale delle tangenti coniugate. Data una superficie ed una linea tracciata in essa, immaginiamo la superficie involupante una serie d'altre superficie, le quali abbiano un contatto *d'ordine qualunque* colla superficie data lungo la linea data. La formola di *BORDONI* esprime appunto la relazione di reciprocità fra le tangenti, nel punto comune, alla linea data ed alla caratteristica della superficie involupante.

In questa *nota* mi propongo di sviluppare alcune conseguenze che derivano dalla citata formola nel caso che il contatto fra la superficie data e le involupate sia di primo ordine, ed i punti di contatto siano *ombelichi* per le involupate medesime **).

*) *Opuscoli matematici e fisici di diversi autori*. Tomo I. Milano 1832.

***) Io ho già trattato quest'argomento, pel caso che le involupate siano sfere, in una *nota* inserita negli *Annali di scienze matematiche e fisiche* (Roma 1855). Ora riprendo la quistione per darle maggior generalità ed anche per rimediare ad un errore occorso in quella *nota*, benchè senza influenza sui principali risultati.

Evidentemente tale ipotesi comprende in sè il caso che le involupate siano sfere o piani.

1. Sia :

$$(1) \quad f(x, y, z) = 0$$

l'equazione di una superficie curva individuata, riferita ad assi rettangolari, e consideriamo in essa il punto qualsivoglia di coordinate x, y, z . Indichiamo per brevità con:

$$p, q, r$$

i valori delle prime derivate parziali:

$$\frac{df}{dx}, \quad \frac{df}{dy}, \quad \frac{df}{dz}$$

corrispondenti al punto (x, y, z) , e con:

$$l, m, n, \quad l_1, m_1, n_1$$

i valori delle derivate seconde parziali:

$$\frac{d^2f}{dx^2}, \quad \frac{d^2f}{dy^2}, \quad \frac{d^2f}{dz^2}, \quad \frac{d^2f}{dy \, dz}, \quad \frac{d^2f}{dx \, dz}, \quad \frac{d^2f}{dx \, dy}$$

corrispondenti al medesimo punto. Sia poi:

$$(2) \quad F(X, Y, Z, U, V, W) = 0$$

l'equazione di una famiglia di superficie, designandosi con X, Y, Z le coordinate correnti, e con U, V, W tre parametri indeterminati. Determiniamo questi parametri per modo che la equazione (2) rappresenti una superficie passante pel punto (x, y, z) della (1) ed ivi avente con questa un contatto di primo ordine. Indicati con:

$$P, Q, R$$

i valori delle derivate parziali:

$$\frac{dF}{dX}, \quad \frac{dF}{dY}, \quad \frac{dF}{dZ}$$

corrispondenti ad $X=x, Y=y, Z=z$; le equazioni da soddisfarsi saranno:

$$F(x, y, z, U, V, W) = 0$$

$$P : Q : R = p : q : r,$$

dalle quali si desumano:

$$U = u(x, y, z), \quad V = v(x, y, z), \quad W = w(x, y, z).$$

Questi valori sostituiti nella (2) danno:

$$(3) \quad F(X, Y, Z, u, v, w) = 0$$

equazione rappresentante quella superficie della famiglia (2) che passa pel punto (x, y, z) della (1) ed ivi ha con essa comune il piano tangente.

Suppongasi ora data una linea qualsivoglia, tracciata sulla superficie (1) e passante pel punto (x, y, z) . Sia essa rappresentata dalle equazioni:

$$(4) \quad x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s),$$

indicandosi con s l'arco della linea medesima. Supposto che nelle u, v, w dell'equazione (3) sian poste per x, y, z le equivalenti funzioni di s date dalle (4), l'equazione (3) verrà a rappresentare, per successivi valori di s , la serie di quelle superficie della famiglia (2) che toccano la superficie (1) lungo la linea (4). Tale serie di superficie ammetterà una superficie involuppo, l'equazione della quale sarà il risultato dell'eliminazione di s fra la (3) e la:

$$(5) \quad F' = 0$$

derivata totale della (3) presa rispetto ad s .

Se nelle equazioni (3) e (5) si considera s come data o costante, esse rappresentano la caratteristica dell'involuppo, cioè la curva lungo la quale la superficie involuppo tocca quell'involuppata che corrisponde al punto (x, y, z) . Supponiamo che in queste equazioni le coordinate correnti X, Y, Z siano espresse in funzione di S , arco della caratteristica; allora le equazioni stesse, considerate come identiche, somministrano, mediante la derivazione rispetto ad S , le:

$$\frac{dF}{dX} \cdot \frac{dX}{dS} + \frac{dF}{dY} \cdot \frac{dY}{dS} + \frac{dF}{dZ} \cdot \frac{dZ}{dS} = 0, \quad \frac{dF'}{dX} \cdot \frac{dX}{dS} + \frac{dF'}{dY} \cdot \frac{dY}{dS} + \frac{dF'}{dZ} \cdot \frac{dZ}{dS} = 0.$$

Facciamo in queste $X=x, Y=y, Z=z$ ed indichiamo con $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ i coseni degli angoli che la tangente alla caratteristica nel punto (x, y, z) fa cogli assi; avremo:

$$(6) \quad p\alpha_1 + q\beta_1 + r\gamma_1 = 0$$

$$(7) \quad \left[\frac{dF'}{dX} \right] \alpha_1 + \left[\frac{dF'}{dY} \right] \beta_1 + \left[\frac{dF'}{dZ} \right] \gamma_1 = 0$$

ove i simboli:

$$\left[\frac{dF'}{dX} \right], \quad \left[\frac{dF'}{dY} \right], \quad \left[\frac{dF'}{dZ} \right]$$

esprimono i valori delle derivate:

$$\frac{dF'}{dX}, \quad \frac{dF'}{dY}, \quad \frac{dF'}{dZ}$$

corrispondenti ad $X=x, Y=y, Z=z$.

Indicato ora con k ciascuno de' rapporti eguali:

$$\frac{P}{p}, \quad \frac{Q}{q}, \quad \frac{R}{r},$$

deriviamo totalmente rispetto ad s le equazioni:

$$P = kp, \quad Q = kq, \quad R = kr$$

considerate come identiche, in virtù della sostituzione delle u, v, w (funzioni di $x(s), y(s), z(s)$) in luogo delle U, V, W . E si noti che la derivata totale di ciascuna delle quantità P, Q, R si comporrà di due parti: l'una relativa alla s implicita nelle u, v, w ; l'altra relativa alla s che entra nelle coordinate esplicite. Derivando adunque le precedenti equazioni, e ponendo:

$$\frac{dP}{dx} = L, \quad \frac{dQ}{dx} = \frac{dR}{dy} = L_1,$$

$$\frac{dQ}{dy} = M, \quad \frac{dR}{dx} = \frac{dP}{dx} = M_1,$$

$$\frac{dR}{dx} = N, \quad \frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx} = N_1,$$

avremo:

$$\left[\frac{dF'}{dX} \right] + Lx' + N_1y' + M_1z' = k'p + k(lx' + n_1y' + m_1z'),$$

$$\left[\frac{dF'}{dY} \right] + N_1x' + My' + L_1z' = k'q + k(n_1x' + my' + l_1z'),$$

$$\left[\frac{dF'}{dZ} \right] + M_1x' + L_1y' + Nz' = k'r + k(m_1x' + l_1y' + nz'),$$

ove gli accenti in alto significano derivate rispetto ad s .

Si moltiplichino le equazioni precedenti, ordinatamente, per $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ e si sommino i risultati; avuto riguardo alle (6), (7) e indicati con α, β, γ i coseni degli angoli che

la tangente alla data linea (4) nel punto (x, y, z) fa cogli assi, cioè posto:

$$x' = \alpha, \quad y' = \beta, \quad z' = \gamma,$$

avremo:

$$(8) \quad \begin{aligned} 0 = & (L - kl) \alpha\alpha_1 + (L_1 - kl_1) (\beta\gamma_1 + \gamma\beta_1) \\ & + (M - km) \beta\beta_1 + (M_1 - km_1) (\gamma\alpha_1 + \alpha\gamma_1) \\ & + (N - kn) \gamma\gamma_1 + (N_1 - kn_1) (\alpha\beta_1 + \beta\alpha_1). \end{aligned}$$

Quest'è la relazione di reciprocità che lega fra loro le rette (α, β, γ) , $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ tangenti, l'una alla linea data e l'altra alla caratteristica della superficie involuppo; cioè essa è, sotto altra forma, l'equazione di BORDONI nel caso del contatto di primo ordine.

Per la proprietà espressa dall'equazione (8), sembra conveniente chiamare *tangenti coniugate* le due rette in quistione, designandole coll'epiteto di *coniugate ordinarie* o *dupiniane* nel caso che le superficie (2) siano piane.

2. Per la normale comune alle superficie (1) e (3) nel punto (x, y, z) conduciamo due piani che passino rispettivamente per le due tangenti coniugate (α, β, γ) , $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$. Siano d, d_1 i raggi di curvatura delle sezioni normali risultanti nella prima superficie, e D, D_1 i raggi di curvatura delle sezioni normali risultanti nella seconda superficie. Avremo le note equazioni:

$$(9) \quad \frac{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}{d} = l\alpha^2 + m\beta^2 + n\gamma^2 + 2l_1\beta\gamma + 2m_1\gamma\alpha + 2n_1\alpha\beta,$$

$$(10) \quad \frac{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}{d_1} = l\alpha_1^2 + m\beta_1^2 + n\gamma_1^2 + 2l_1\beta_1\gamma_1 + 2m_1\gamma_1\alpha_1 + 2n_1\alpha_1\beta_1,$$

$$\frac{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}{D} = L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 + 2L_1\beta\gamma + 2M_1\gamma\alpha + 2N_1\alpha\beta,$$

$$\frac{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}{D_1} = L\alpha_1^2 + M\beta_1^2 + N\gamma_1^2 + 2L_1\beta_1\gamma_1 + 2M_1\gamma_1\alpha_1 + 2N_1\alpha_1\beta_1,$$

da cui, avuto riguardo all'identità:

$$k^2 (p^2 + q^2 + r^2) = P^2 + Q^2 + R^2,$$

si ricava:

$$k\sqrt{p^2+q^2+r^2}\left(\frac{1}{D}-\frac{1}{d}\right) = (L-kl)\alpha^2 + 2(L_1-kl_1)\beta\gamma \\ + (M-km)\beta^2 + 2(M_1-km_1)\gamma\alpha \\ + (N-kn)\gamma^2 + 2(N_1-kn_1)\alpha\beta,$$

$$k\sqrt{p^2+q^2+r^2}\left(\frac{1}{D_1}-\frac{1}{d_1}\right) = (L-kl)\alpha_1^2 + 2(L_1-kl_1)\beta_1\gamma_1 \\ + (M-km)\beta_1^2 + 2(M_1-km_1)\gamma_1\alpha_1 \\ + (N-kn)\gamma_1^2 + 2(N_1-kn_1)\alpha_1\beta_1.$$

Queste due equazioni si moltiplichino fra loro, membro per membro, e dal risultato sottraggasi il quadrato della (8). Avuto riguardo alle note relazioni:

$$\frac{\beta\gamma_1 - \gamma\beta_1}{\text{sen } \omega} = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \quad \frac{\gamma\alpha_1 - \alpha\gamma_1}{\text{sen } \omega} = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \quad \frac{\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1}{\text{sen } \omega} = \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},$$

ove ω è l'angolo delle rette (α, β, γ) , $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, il risultato può scriversi così:

$$\frac{k^2(p^2+q^2+r^2)}{\text{sen}^2 \omega} \left(\frac{1}{D}-\frac{1}{d}\right) \left(\frac{1}{D_1}-\frac{1}{d_1}\right) = \\ = \begin{vmatrix} p & L-kl & N_1-kn_1 & M_1-km_1 \\ q & N_1-kn_1 & M-km & L_1-kl_1 \\ r & M_1-km_1 & L_1-kl_1 & N-kn \\ 0 & p & q & r \end{vmatrix} = \Phi + k\Upsilon + k^2\Theta.$$

Siano δ, δ_1 i raggi di massima e minima curvatura della superficie (1) nel punto (x, y, z) ; per una nota formola di GAUSS *) avremo:

$$\Theta = \frac{(p^2+q^2+r^2)^2}{\delta\delta_1}.$$

La quantità Φ ha l'analogo significato rispetto alla superficie inviluppata. Ma noi supporremo che per questa il punto (x, y, z) sia un ombelico, ed indicheremo con Δ il corrispondente raggio di curvatura, onde sarà $D=D_1=\Delta$. Avremo dunque:

$$\Phi = \frac{k^2(p^2+q^2+r^2)^2}{\Delta^2}.$$

*) *Disquisitiones generales circa superficies curvas.*

L'espressione Υ può scriversi così:

$$\begin{aligned} \Upsilon = & -l(Nq^2 + Mr^2 - 2L_1qr) + 2l_1(p(L_1p - M_1q - N_1r) + Lqr) \\ & - m(Lr^2 + Np^2 - 2M_1rp) + 2m_1(q(-L_1p + M_1q - N_1r) + Mrp) \\ & - n(Mp^2 + Lq^2 - 2N_1pq) + 2n_1(r(-L_1p - M_1q + N_1r) + Npq). \end{aligned}$$

Ma per le proprietà caratteristiche degli ombelichi, si hanno le seguenti formole date dal prof. CHELINI nella sua elegantissima memoria *sulle formole fondamentali riguardanti la curvatura delle superficie e delle linee* *):

$$\begin{aligned} \frac{Nq^2 + Mr^2 - 2L_1qr}{q^2 + r^2} &= \frac{p(L_1p - M_1q - N_1r) + Lqr}{qr} \\ &= \frac{Lr^2 + Np^2 - 2M_1rp}{r^2 + p^2} = \frac{q(-L_1p + M_1q - N_1r) + Mrp}{rp} \\ &= \frac{Mp^2 + Lq^2 - 2N_1pq}{p^2 + q^2} = \frac{r(-L_1p - M_1q + N_1r) + Npq}{pq} \\ &= \frac{k\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}{\Delta}; \end{aligned}$$

quindi:

$$\Upsilon = -\frac{k\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}{\Delta} \times \left\{ \begin{array}{l} (m+n)p^2 - 2l_1qr \\ + (n+l)q^2 - 2m_1rp \\ + (l+m)r^2 - 2n_1pq \end{array} \right\}.$$

Ma si ha inoltre **):

$$\begin{aligned} (m+n)p^2 + (n+l)q^2 + (l+m)r^2 - 2l_1qr - 2m_1rp - 2n_1pq \\ = (p^2 + q^2 + r^2)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta_1} \right), \end{aligned}$$

onde:

$$\Upsilon = -\frac{k(p^2 + q^2 + r^2)}{\Delta} \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta_1} \right).$$

*) *Annali di scienze matematiche e fisiche*. Roma 1853.

***) *Ibidem*.

Otteniamo dunque finalmente:

$$(11) \quad \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\bar{d}}\right) \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\bar{d}_1}\right) = \text{sen}^2 \omega \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\bar{\delta}}\right) \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\bar{\delta}_1}\right).$$

3. Le citate equazioni del prof. CHELINI, relative agli ombelichi della superficie, somministrano anche:

$$\begin{aligned} L &= \frac{k\sqrt{p^2+q^2+r^2}}{\Delta} - \frac{p}{qr} (L_1p - M_1q - N_1r), \\ M &= \frac{k\sqrt{p^2+q^2+r^2}}{\Delta} - \frac{q}{rp} (-L_1p + M_1q - N_1r), \\ N &= \frac{k\sqrt{p^2+q^2+r^2}}{\Delta} - \frac{r}{pq} (-L_1p - M_1q + N_1r), \end{aligned}$$

e per conseguenza:

$$\begin{aligned} L\alpha_1 + M\beta_1 + N\gamma_1 + L_1(\beta\gamma_1 + \gamma\beta_1) + M_1(\gamma\alpha_1 + \alpha\gamma_1) + N_1(\alpha\beta_1 + \beta\alpha_1) \\ = \frac{k\sqrt{p^2+q^2+r^2}}{\Delta} (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1) \\ + \frac{L_1}{qr} (-p^2\alpha\alpha_1 + (q\beta + r\gamma)(q\beta_1 + r\gamma_1)) \\ + \frac{M_1}{rp} (-q^2\beta\beta_1 + (r\gamma + px)(r\gamma_1 + px_1)) \\ + \frac{N_1}{pq} (-r^2\gamma\gamma_1 + (px + q\beta)(px_1 + q\beta_1)) \end{aligned}$$

d'onde, avuto riguardo alle identità:

$$\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 = \cos \omega, \quad px + q\beta + r\gamma = 0, \quad px_1 + q\beta_1 + r\gamma_1 = 0,$$

otteniamo:

$$\begin{aligned} L\alpha\alpha_1 + M\beta\beta_1 + N\gamma\gamma_1 + L_1(\beta\gamma_1 + \gamma\beta_1) + M_1(\gamma\alpha_1 + \alpha\gamma_1) + N_1(\alpha\beta_1 + \beta\alpha_1) \\ = \frac{k\sqrt{p^2+q^2+r^2}}{\Delta} \cos \omega. \end{aligned}$$

Perciò all'equazione (8) può darsi la forma:

$$(12) \quad \frac{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}{\Delta} \cos \omega = l\alpha_1 + l_1(\beta\gamma_1 + \gamma\beta_1) \\ + m\beta\beta_1 + m_1(\gamma\alpha_1 + \alpha\gamma_1) \\ + n\gamma\gamma_1 + n_1(\alpha\beta_1 + \beta\alpha_1).$$

Si moltiplichino fra loro le equazioni (9), (10) e dal risultato si sottragga il quadrato della (12). Avremo:

$$(p^2 + q^2 + r^2) \left(\frac{1}{dd_1} - \frac{\cos^2 \omega}{\Delta^2} \right) = \frac{\text{sen}^2 \omega}{p^2 + q^2 + r^2} \Theta,$$

cioè:

$$(13) \quad \frac{1}{dd_1} - \frac{\cos^2 \omega}{\Delta^2} = \frac{\text{sen}^2 \omega}{\delta\delta_1}.$$

4. Nel caso che studiamo, cioè che le superficie involupate siano qualsivogliano, ma che per ciascuna di esse il punto di contatto colla data sia un ombelico, chiameremo le due rette (α, β, γ) , $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ *tangenti sferoconiugate*, perchè le equazioni (11) e (13), che ne esprimono le proprietà, sono identiche a quelle che si otterrebbero supponendo le involupate sferiche.

Al sistema delle equazioni (11), (13) equivale il seguente:

$$(14) \quad \frac{1}{d} + \frac{1}{d_1} - \frac{2}{\Delta} = \text{sen}^2 \omega \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta_1} - \frac{2}{\Delta} \right),$$

$$(15) \quad \frac{1}{dd_1} - \frac{1}{\Delta^2} = \text{sen}^2 \omega \left(\frac{1}{\delta\delta_1} - \frac{1}{\Delta^2} \right),$$

dalle quali eliminando $\text{sen}^2 \omega$ si ha la:

$$\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{d_1} \right) \left(\frac{1}{\delta\delta_1} - \frac{1}{\Delta^2} \right) - \frac{1}{dd_1} \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta_1} - \frac{2}{\Delta} \right) + \frac{1}{\Delta} \left(\frac{1}{\Delta\delta} + \frac{1}{\Delta\delta_1} - \frac{2}{\delta\delta_1} \right) = 0,$$

relazione fra i raggi d , d_1 di due sezioni normali a tangenti sferoconiugate. Se $\omega = 90^\circ$, le (14), (15) danno i raggi d , d_1 eguali ai raggi δ , δ_1 ; dunque:

In un punto qualunque di una data superficie curva, le linee di curvatura hanno le tangenti sferoconiugate. Le sole linee ortogonali che abbiano le tangenti sferoconiugate sono le linee di curvatura.

Noi riterremo che il raggio Δ non varii che al variare del punto (x, y, z) sulla data superficie. Ciò ha luogo per es. supponendo che le involupate siano sfere di raggio

costante, o sfere passanti per uno stesso punto dato nello spazio, o sfere aventi i rispettivi centri in un dato piano, ecc.

Ciò premesso, le formole (11), (14), (15) esprimono che in un punto dato di una superficie curva data, qualunque siano due sezioni normali a tangenti sferoconiugate, comprendenti l'angolo ω e aventi i raggi di curvatura d, d_1 , le quantità:

$$\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{d}\right) \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{d_1}\right) : \text{sen}^2 \omega, \quad \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{d_1} + \frac{2}{\Delta}\right) : \text{sen}^2 \omega, \quad \left(\frac{1}{dd_1} - \frac{1}{\Delta^2}\right) : \text{sen}^2 \omega$$

sono costanti.

5. Siano θ, θ_1 gli angoli che le due rette $(\alpha, \beta, \gamma), (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ comprendono con una linea di curvatura della data superficie, nel punto (x, y, z) . Avremo, pel noto teorema di EULERO:

$$\frac{1}{d} = \frac{\cos^2 \theta}{\delta} + \frac{\text{sen}^2 \theta}{\delta_1}, \quad \frac{1}{d_1} = \frac{\cos^2 \theta_1}{\delta} + \frac{\text{sen}^2 \theta_1}{\delta_1}.$$

Questi valori sostituiti nella (14) danno:

$$\frac{\cos \theta \cdot \cos \theta_1}{\delta} + \frac{\text{sen} \theta \cdot \text{sen} \theta_1}{\delta_1} = \frac{\cos(\theta - \theta_1)}{\Delta},$$

ossia:

$$(16) \quad \text{tang} \theta \cdot \text{tang} \theta_1 = - \frac{\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\delta}}{\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\delta_1}},$$

relazione fra gli angoli che una linea di curvatura fa con due tangenti sferoconiugate. Cioè:

In un punto dato di una data superficie curva, il prodotto delle tangenti trigonometriche degli angoli che due rette tangenti sferoconiugate qualsivogliano fanno con una stessa linea di curvatura è costante.

Segue da ciò:

In un punto dato di una data superficie curva, le coppie di rette tangenti sferoconiugate sono in involuzione.

Le rette doppie di questa involuzione sono le tangenti di quelle due sezioni normali, egualmente inclinate ad una stessa linea di curvatura, per le quali il raggio del circolo osculatore è uguale a Δ . Tali rette doppie sono reali o immaginarie se-

condo che le quantità:

$$\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\delta}, \quad \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\delta_1}$$

abbiano segni contrari o eguali.

È ovvio che per dedurre le proprietà delle tangenti coniugate di DUPIN da quelle dimostrate in questa *nota*, basta porre $\frac{1}{\Delta} = 0$.

6. Dati i coseni (α, β, γ) della direzione di una retta tangente alla superficie (1), proponiamoci di trovare i coseni $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ della tangente sferoconiugata.

Indicando con a, b, c i coseni degli angoli che la normale alla superficie (1) nel punto (x, y, z) fa cogli assi, si ha:

$$a\sqrt{p^2+q^2+r^2} = p, \quad b\sqrt{p^2+q^2+r^2} = q, \quad c\sqrt{p^2+q^2+r^2} = r,$$

e derivando rispetto ad s , arco di una linea qualsivoglia tracciata sulla superficie data e toccata dalla retta (α, β, γ) nel punto (x, y, z) :

$$a(\sqrt{p^2+q^2+r^2})' + a'\sqrt{p^2+q^2+r^2} = l\alpha + n_1\beta + m_1\gamma$$

$$b(\sqrt{p^2+q^2+r^2})' + b'\sqrt{p^2+q^2+r^2} = n_1\alpha + m\beta + l_1\gamma$$

$$c(\sqrt{p^2+q^2+r^2})' + c'\sqrt{p^2+q^2+r^2} = m_1\alpha + l_1\beta + n\gamma.$$

Si moltiplichino queste equazioni ordinatamente per $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ e si sommino i risultati:

$$\begin{aligned} (a'\alpha_1 + b'\beta_1 + c'\gamma_1)\sqrt{p^2+q^2+r^2} &= l\alpha\alpha_1 + l_1(\beta\gamma_1 + \gamma\beta_1) \\ &+ m\beta\beta_1 + m_1(\gamma\alpha_1 + \alpha\gamma_1) \\ &+ n\gamma\gamma_1 + n_1(\alpha\beta_1 + \beta\alpha_1), \end{aligned}$$

quindi la (12) potrà scriversi così:

$$\alpha_1(\alpha - \Delta a') + \beta_1(\beta - \Delta b') + \gamma_1(\gamma - \Delta c') = 0.$$

Da questa equazione e dalle:

$$a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1 = 0, \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$$

si ricava:

$$\alpha_1 = \frac{b\gamma - c\beta - \Delta(bc' - cb')}{h}, \quad \beta_1 = \frac{c\alpha - a\gamma - \Delta(ca' - ac')}{h}, \quad \gamma_1 = \frac{a\beta - b\alpha - \Delta(ab' - ba')}{h}$$

ove:

$$h^2 = 1 + \Delta^2 (a'^2 + b'^2 + c'^2) - 2\Delta (a'\alpha + b'\beta + c'\gamma).$$

Ora, per una formola di OSSIAN BONNET *) si ha:

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = \frac{\cos^2 \theta}{\delta^2} + \frac{\sin^2 \theta}{\delta_1^2}$$

ossia, introducendo il raggio d mediante il noto teorema euleriano:

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = \frac{\delta + \delta_1 - d}{\delta \delta_1 d}.$$

Inoltre si ha:

$$a'\alpha + b'\beta + c'\gamma = \frac{1}{d},$$

onde:

$$\frac{h^2}{\Delta^2} = \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{d}\right)^2 - \left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{d}\right) \left(\frac{1}{\delta_1} - \frac{1}{d}\right).$$

I coseni degli angoli che fa cogli assi la tangente coniugata ordinaria di quella data per mezzo de' coseni (α, β, γ) sono proporzionali alle quantità:

$$bc' - cb', \quad ca' - ac', \quad ab' - ba',$$

dunque, perchè la tangente sferoconiugata coincida colla coniugata dupiniana, dev'essere:

$$\frac{b\gamma - c\beta}{bc' - cb'} = \frac{c\alpha - a\gamma}{ca' - ac'} = \frac{a\beta - b\alpha}{ab' - ba'},$$

da cui si hanno le:

$$\alpha : \beta : \gamma = a' : b' : c'$$

che sono le equazioni di una linea di curvatura, date dal prof. BRIOSCHI nella sua bella memoria *sulle proprietà di una linea tracciata sopra una superficie* **). Dunque:

Le sole linee di curvatura sono simultaneamente coniugate ordinarie e sferoconiugate.

7. Il centro della curvatura ombelicale per la superficie inviluppata (3) è il punto che ha per coordinate:

$$u = x - \Delta a, \quad v = y - \Delta b, \quad w = z - \Delta c,$$

*) *Journal de l'École Polytechnique*, 32° cahier, pag. 9.

***) *Annali di scienze matematiche e fisiche*. Roma 1854.

il quale appartiene alla normale della data superficie nel punto (x, y, z) , epperò è situato sulla superficie gobba formata dalle normali della medesima superficie lungo la data linea (4). Quali sono i coseni degli angoli che fa cogli assi la normale a questa superficie gobba in quel punto (u, v, w) ?

Se immaginiamo la retta tangente alla superficie gobba in questo punto e perpendicolare alla generatrice rettilinea (a, b, c) , i coseni della direzione di quella retta sono evidentemente proporzionali alle quantità:

$$x' - \Delta a', \quad y' - \Delta b', \quad z' - \Delta c'.$$

Quindi i coseni per la normale alla superficie gobba saranno proporzionali alle quantità:

$$b(z' - \Delta c') - c(y' - \Delta b'), \quad c(x' - \Delta a') - a(z' - \Delta c'), \quad a(y' - \Delta b') - b(x' - \Delta a')$$

cioè la normale alla superficie gobba nel punto (u, v, w) è parallela alla retta $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ tangente sferoconiugata di quella che tocca la linea data nel punto (x, y, z) .

Bologna, 3 gennaio 1861.
