20.

SULLE CONICHE E SULLE SUPERFICIE DI SECOND' ORDINE CONGIUNTE.

Annali di Matematica pura ed applicata, serie I, tomo III (1860), pp. 257-282.

Il signor Terquem, in un breve articolo inserito nel terzo volume del giornale di Liouville, primo considerò le *linee congiunte* in una conica, chiamando con questo nome due rette tali, che assunte per assi delle coordinate x, y, rendano eguali i coefficienti di x^2 ed y^2 nella equazione della curva, ossia due rette tali, che seghino, realmente o idealmente, la conica in quattro punti appartenenti ad una stessa circonferenza.

Poscia il professore Chasles, in una memoria che fa parte del medesimo volume di quel periodico matematico, trattò lo stesso argomento sotto l'aspetto della pura geometria, e, con quella fecondità che gli è propria, dimostrò un vasto sistema di proposizioni relative alle linee congiunte. Verso il fine della memoria, l'illustre geometra accenna brevemente come si possa applicare quella teorica alle superficie di second'ordine, ed enuncia alcune proprietà de' *coni congiunti,* cioè di quei coni di second'ordine che passano per l'intersezione di una sfera con una superficie dello stesso ordine. Ivi egli promette di ritornare su quest'ultimo argomento e di trattarlo più completamente; ma, per quanto io sappia, non diede seguito a tale suo proposito, certamente distratto da più gravi lavori; nè so se alcun altro abbia fatto le sue veci.

Se io oso, dopo tali predecessori, pubblicare questo, qualunque siasi lavoro, l'argomento del quale ha molta attinenza colla teorica delle linee e dei coni congiunti, non miro certamente a presentare una serie di verità che abbiano la pretesa d'essere affatto nuove. Anzi confesso che ho dedotto la maggior parte de' teoremi, qui sotto enunciati intorno alle superficie di second'ordine, da quelli dell'illustre Chasles sopra le superficie omofocali *), mediante il metodo delle polari reciproche; e per ciò stesso, ne ommetto, come superflue, le dimostrazioni. Mio unico scopo è di attirare l'attenzione di qualche benevolo lettore su d'una teoria che promette d'essere feconda quanto lo è quella de' luoghi omofocali, da cui la prima può derivarsi mercè la trasformazione polare.

È notissimo che le coniche omofocali si possono considerare come inscritte in uno stesso quadrilatero immaginario, avente due vertici reali (i due fuochi reali comuni alle coniche), due vertici immaginari a distanza finita (i due fuochi immaginari situati sul secondo asse delle coniche) e il quinto e sesto vertice immaginari all'infinito (i punti circolari all'infinito). Il sig. CHASLES ha enunciato pel primo l'analoga proprietà per le superficie omofocali **). Più superficie omofocali, cioè dotate di sezioni principali omofocali, sono idealmente inscritte in una medesima superficie sviluppabile immaginaria, avente tre coniche di stringimento (una ellittica, la seconda iperbolica, la terza immaginaria) ne' piani principali comuni alle superficie date; mentre la quarta curva di stringimento è il cerchio immaginario all'infinito.

Se le superficie di second'ordine, che si considerano, sono coni, è noto che a lato alla teorica de' coni omofocali esiste la teorica de' coni omociclici: teorica che si deriva dalla prima mediante la polarità supplementare ***). E da questa doppia teoria dei coni si conclude poi immediatamente la doppia teorica delle coniche sferiche omofocali e delle coniche sferiche omocicliche ****).

Ciò premesso, è ragionevole pensare che anche per le coniche piane e per le superficie di second'ordine in generale, esista una teoria analoga a quella de' coni omociclici; una teoria di un tale sistema di coniche o di superficie, che sia rispetto alle coniche circoscritte ad uno stesso quadrangolo o alle superficie passanti per una stessa curva gobba, ciò che le coniche e le superficie omofocali sono rispetto alle coniche inscritte in un quadrilatero e alle superficie inscritte in una stessa sviluppabile.

Questa memoria mostrerà che infatti tale teorica esiste e che essa è inclusa, come caso particolare, in quella di un sistema di coniche aventi le stesse linee congiunte, rispetto ad un dato cerchio, o di un sistema di superficie di second'ordine aventi gli stessi coni congiunti, relativamente ad una data sfera.

---

*) *Aperçu historique,* Note 31ᵉ *(Propriétés nouvelles des surfaces du second degrè, analogues à celles des foyers dans les coniques).* — Comptes rendus de l'Académie de Paris, 1860; n. 24 et 25.

**) *Aperçu historique,* Note 31ᵉ.

***) CHASLES, *Mémoire de géométrie pure sur le propriétés générales des cônes du second dégré* (Nouveaux Mémoires de l'Acad. de Bruxelles, tom. VI, 1830).

****) CHASLES, *Mémoire de géométrie sur les propriétés générales des coniques sphériques* (Nouveaux Mém. de l'Acad. de Bruxelles, t. VI). — Comptes rendus, 1860, n. 13. — Nouvelles Annales de Mathématiques, juillet 1860.

Coniche congiunte.

1. Data una conica riferita ad assi ortogonali:

$$\mathrm{U} = 0$$

si diranno *linee congiunte ad essa, rispetto ad un dato punto* (α, β), due rette che seghino idealmente la curva in quattro punti appartenenti ad una circonferenza di raggio nullo, avente il centro nel punto dato, ossia, ciò che è lo stesso, al sistema di due rette immaginarie: [26]

$$\mathrm{S} = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = 0 \, .$$

Per trovare tali rette, basta porre l'equazione:

$$\mathrm{U} + \omega \mathrm{S} = 0$$

e determinare ω in modo che il discriminante di essa sia nullo. L'equazione precedente rappresenta evidentemente un sistema di coniche aventi le stesse linee congiunte rispetto al punto dato.

2. La conica data, riferita ai suoi assi principali, sia rappresentata dall'equazione:

$$ax^2 + by^2 - 1 = 0 \dots (a > b) \, .$$

Consideriamo le sue linee congiunte rispetto al centro della curva: rette che noi chiameremo semplicemente *linee congiunte.* Esse sono date dall'equazione:

$$ax^2 + by^2 - 1 + \omega (x^2 + y^2) = 0$$

quando diasi ad ω uno dei tre valori:

$$-a \, , \qquad -b \, , \qquad \infty \, .$$

Si hanno così i tre sistemi di linee congiunte:

$$(b - a) y^2 - 1 = 0 \, , \qquad (a - b) x^2 - 1 = 0 \, , \qquad x^2 + y^2 = 0 \, .$$

Le sole rette del secondo sistema sono reali, ed invero parallele all'asse focale, se la data conica è un'ellisse, o all'asse non focale, se essa è un'iperbole.

Que' tre sistemi di linee congiunte sono i lati e le diagonali di un rettangolo immaginario, inscritto nella conica data e concentrico ad essa.

3. Ecco alcune proprietà delle linee congiunte di una conica: proprietà che sono polari reciproche di quelle che competono ai fuochi.

Data una retta inscritta fra le linee congiunte di una conica, gli angoli, sotto i quali son vedute dal centro la retta stessa e la parte di essa inscritta nella conica, hanno la stessa bisettrice.

Da cui segue:

Data una corda inscritta in una conica, se si dividono per metà l'angolo sotto il quale la corda è veduta dal centro e l'angolo supplementare; la corda sarà incontrata in quattro punti armonici dalle due bisettrici e dalle linee congiunte.

Se nel precedente teorema la retta data è tangente alla conica si ha:

Data una retta tangente ad una conica, il raggio vettore che va al punto di contatto divide pel mezzo l'angolo sotto il quale si vede dal centro la porzione di tangente compresa fra le linee congiunte.

E per conseguenza:

Una tangente qualunque di una conica è segata armonicamente dalle linee congiunte dal raggio vettore che va al punto di contatto e dal raggio a questo perpendicolare.

4. *Dato un punto arbitrario* m *e presa la sua polare* M *rispetto ad una conica; se* m' *è quel punto di* M *che è quarto armonico dopo i punti in cui* M *incontra le linee congiunte e la parallela ad esse condotta per* m; *il segmento* mm' *è veduto dal centro sotto angolo retto.*

Reciprocamente:

Un segmento rettilineo, veduto dal centro di una conica sotto angolo retto, e i cui termini siano punti coniugati relativamente a questa, è diviso armonicamente dalle linee congiunte.

E come caso speciale:

Due punti coniugati rispetto ad una conica, presi su d'una linea congiunta, sono sempre veduti dal centro sotto angolo retto.

Quest'ultima proprietà può anche risguardarsi come compresa nella seguente:

Un angolo circoscritto ad una conica determina su d'una linea congiunta di questa un segmento veduto dal centro sotto un angolo, il cui supplemento ha per bisettrice il raggio vettore condotto al punto in cui la corda di contatto incontra la linea congiunta.

5. *Se una tangente qualunque di una conica di centro* O *incontra le linee congiunte rispettivamente ne' punti* α, β; *condotte per* O *le rette perpendicolari ai raggi* $O\alpha$, $O\beta$, *l'una di esse incontri la tangente in* m *e la prima linea congiunta in* a; *l'altra seghi la tangente in* n *e la seconda linea congiunta in* b. *Allora si avrà:*

$$\left(\frac{1}{Om}-\frac{1}{Oa}\right)\pm\left(\frac{1}{On}-\frac{1}{Ob}\right)=\text{cost.}$$

Se una retta condotta pel centro O *di una conica incontra questa in* m *e una linea* *congiunta in* m', *la quantità* $\frac{1}{\overline{Om}^2} - \frac{1}{\overline{Om'}^2}$ *è costante, qualunque sia la direzione della trasversale diametrale.*

Se un angolo circoscritto ad una conica di centro O *ha il vertice su d'una linea congiunta, e se il raggio vettore perpendicolare a quello che va al vertice incontra la linea congiunta in* a *e i lati dell'angolo in* m, m', *avremo:*

$$\frac{Om \cdot Oa}{ma} + \frac{Om' \cdot Oa}{m'a} = \text{cost.}; \qquad \frac{ma \cdot m'a}{\overline{Oa}^2 \cdot mm'} = \text{cost.}$$

Data una retta fissa che incontri una linea congiunta di una conica di centro O *in* r; *se da un punto qualunque della retta fissa si conducono due tangenti alla conica, le quali incontrino la linea congiunta in* p, q; *avremo:*

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\, pOr \ . \ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\, qOr = \text{cost.}$$

6. [27] *Una tangente qualunque di una conica e la retta che unisce il punto di contatto al polo di una linea congiunta determinano su di questa un segmento veduto dal centro sotto angolo retto.*

Se da un punto qualunque di una linea congiunta ad una conica di centro O *si conducono due rette toccanti la curva rispettivamente in* m *ed* n; *e se su di esse si prendono due altri punti* m', n' *in modo che gli angoli* mOn, m'On' *siano retti, le rette* mn, m'n' *si segheranno sull'altra linea congiunta.*

Sia data una conica di centro O, *una sua linea congiunta ed il polo* a *di questa. Una tangente qualunque della conica incontri* Oa *in* m. *Inoltre il raggio perpendicolare a quello che va al punto d'incontro della tangente colla linea congiunta incontri queste rette in* m', n. *Sarà:*

$$\left(\frac{1}{Oa} - \frac{1}{Om}\right) : \left(\frac{1}{Om'} - \frac{1}{On}\right) = \text{cost.}$$

Due tangenti di una conica incontrano le due rette congiunte in quattro punti appartenenti ad un'altra conica che ha un fuoco nel centro della data e per relativa direttrice la corda di contatto delle due tangenti.

Ecc. ecc.

7. L'equazione:

$$(1) \qquad (a + \omega)\, x^2 + (b + \omega)\, y^2 - 1 = 0\,,$$

ove si consideri ω indeterminata, rappresenta un sistema di coniche aventi le stesse linee congiunte, rispetto al centro comune. Le chiamerò *coniche congiunte.* Queste coniche hanno in comune gli assi, e son desse appunto che corrispondono, polarmente, alle coniche omofocali.

L'equazione (1) mostra che *più coniche congiunte si ponno risguardare come circoscritte allo stesso rettangolo immaginario, formato dai tre sistemi di linee congiunte.*

Il sistema (1) contiene infinite ellissi ed infinite iperboli. Le ellissi sono tutte nello spazio compreso fra le due linee congiunte reali; le iperboli tutte al di fuori, ciascuna avendo un ramo da una banda e l'altro dalla banda opposta, rispetto alle linee congiunte. Ciascuna ellisse ha l'asse maggiore parallelo alle linee congiunte; ciascuna iperbole ha l'asse focale perpendicolare alle linee congiunte. La serie delle ellissi comincia da quel punto, che è centro comune delle coniche congiunte, e finisce col sistema delle linee congiunte. La serie delle iperboli comincia con questo sistema e procede indefinitamente, senza limite reale. Onde:

Per un punto qualunque nel piano di una conica passa sempre una, ed una sola, conica congiunta alla data; la quale è iperbole o ellisse secondo che il punto sia fuori o entro lo spazio compreso fra le linee congiunte.

Invece *una retta qualunque tocca sempre due coniche congiunte ad una data, le quali sono di specie diversa.* I due punti di contatto sono veduti dal centro sotto angolo retto; ed i raggi vettori che vanno ai punti di contatto sono le bisettrici dell'angolo formato dai raggi condotti ai punti in cui la retta sega qualunque altra conica congiunta alla data. Cioè:

Dato un fascio di coniche congiunte ed una retta trasversale, le porzioni di questa comprese fra le coniche sono vedute dal centro sotto angoli che hanno le stesse bisettrici. Queste incontrano la trasversale ne' punti in cui essa tocca due coniche del fascio.

Date in un piano due rette parallele, si ponno descrivere infinite coniche, ellissi ed iperboli, di cui quelle siano le linee congiunte. Ogni ellisse ha con ciascuna iperbole quattro tangenti comuni, e per ciascuna di queste i due punti di contatto sono veduti dal centro sotto angolo retto.

L'inviluppo di una retta inscritta fra due coniche congiunte e veduta dal loro centro sotto angolo retto, è una circonferenza concentrica alle coniche date.

8. *In due coniche congiunte, la differenza degl'inversi quadrati di due semidiametri nella stessa direzione è costante.* (Questa costante è la differenza dei valori del parametro ω, relativi alle due coniche).

Per conseguenza:

Quando un'ellisse ed un'iperbole sono congiunte, la prima è incontrata dagli assintoti della seconda in quattro punti situati sopra una circonferenza concentrica alle coniche date. L'inverso quadrato del raggio di questa circonferenza è la differenza de' valori di ω, corrispondenti alle due coniche.

Dato un fascio di coniche congiunte, i due punti in cui una trasversale arbitraria tocca due di queste curve, sono coniugati rispetto a qualsivoglia conica del fascio.

Dato un fascio di coniche congiunte, una trasversale arbitraria le sega in coppie di punti formanti un'involuzione. I punti doppi di questa involuzione sono quelli ove la trasversale tocca due coniche del fascio. I raggi vettori, condotti dal centro comune delle coniche ai punti dell'involuzione anzidetta, formano un'altra involuzione, nella quale l'angolo di due raggi omologhi, e l'angolo supplementare sono divisi per metà dai raggi doppi.

9. *I poli di una trasversale arbitraria, relativi a più coniche congiunte, sono in un'iperbole equilatera che passa pel centro comune delle coniche date ed ha gli assintoti rispettivamente paralleli agli assi di queste.*

Il ramo di quest'iperbole, che passa pel centro delle coniche congiunte, è ivi diviso in due parti. La parte che allontanandosi da questo centro si va accostando alle linee congiunte, contiene i poli relativi alle ellissi appartenenti al dato sistema di coniche. L'altra parte contiene i poli relativi a coniche immaginarie.

L'altro ramo poi contiene i poli relativi alle iperboli.

Se in un punto qualunque dell'iperbole equilatera si conduce la retta tangente alla conica congiunta che passa per esso, questa retta va ad incontrare la trasversale in un punto, pel quale passa un'altra conica congiunta, ivi toccata dalla medesima retta.

Le rette polari di un punto m *rispetto a più coniche congiunte, passano per uno stesso punto* m'. I punti m, m' sono veduti dal centro comune delle coniche sotto angolo retto.

Se il punto m *percorre una retta* l, *il punto* m' *descrive l'iperbole luogo dei poli di* l.

Ecc. ecc.

10. Se:

$$ux + vy = 1$$

è l'equazione di una retta, la condizione ch'essa tocchi la conica (1) è:

$$\frac{u^2}{a+\omega} + \frac{v^2}{b+\omega} = 1 .$$

Siano μ, $-\nu$ le radici di questa equazione quadratica, cioè i parametri delle due coniche toccate dalla retta proposta. Si avrà:

$$\mu - \nu = u^2 + v^2 - (a+b) , \qquad \mu\nu = bu^2 + av^2 - ab ,$$

da cui:

$$u^2 = \frac{(a+\mu)(a-\nu)}{a-b} , \quad v^2 = \frac{(\mu+b)(\nu-b)}{a-b} .$$

Le quantità μ, ν si ponno assumere come *coordinate ellittiche tangenziali.*

Superficie di second'ordine congiunte.

11. Data la superficie di second'ordine:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0 \tag{1}$$

e la sfera di raggio nullo, o cono immaginario:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = 0\,, \tag{2}$$

qualunque superficie (di second'ordine), circoscritta alla loro curva di ideale intersezione, è rappresentata dall'equazione:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 + \omega\Big((x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2\Big) = 0\,. \tag{3}$$

Tutte le superficie comprese in questa equazione hanno in comune le direzioni dei piani ciclici. Il luogo dei centri delle medesime è la cubica gobba:

$$x = \frac{\alpha\omega}{a+\omega}\,, \quad y = \frac{\beta\omega}{b+\omega}\,, \quad z = \frac{\gamma\omega}{c+\omega}$$

che ha gli assintoti paralleli agli assi principali delle superficie (3). Questa curva ha quattro punti appartenenti alle superficie, di cui sono i rispettivi centri: i quali punti sono i vertici del tetraedro polare comune, ossia sono i vertici d'altrettanti coni che fanno parte del sistema (3), secondo il noto teorema di PONCELET *). Uno di tali coni è quello rappresentato dalla (2). Questi coni diconsi *congiunti* alla superficie data (1) relativamente al punto (α, β, γ). Diremo anche che tutte le superficie (3) sono *congiunte* rispetto a questo medesimo punto.

12. Data adunque una superficie di second'ordine, riferita ad assi ortogonali:

$$U = 0$$

ed un punto O di coordinate (α, β, γ), tutte le superficie *congiunte* ad essa rispetto a questo punto sono incluse nell'equazione:

$$U + iS = 0$$

essendo:

$$S = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2$$

ed i un parametro indeterminato.

---

*) *Traité des propriétés projectives des figures,* Paris, 1822: p. 395.

Se $U=0$ rappresenta il sistema di due piani, questi diventano i *piani direttori* relativi al *fuoco* O per la superficie $U+iS=0$; cioè O è un *punto focale* per questa superficie, e que' due piani sono i corrispondenti *piani direttori* *). Se i due piani $U=0$ passano pel punto O, la superficie $U+iS=0$ è un cono del quale O è il vertice e que' due piani sono i piani ciclici.

Se U è il quadrato d'una funzione lineare delle x, y, z, cioè se $U=0$ rappresenta un piano unico, la superficie $U+iS=0$ è di rotazione: per essa O è un fuoco ed $U=0$ è il relativo piano direttore. Se il piano $U=0$ passasse per O, la superficie $U+iS=0$ sarebbe un cono di rotazione, avente il vertice in O e l'asse perpendicolare al piano $U=0$.

Ciò posto, siamo in grado di dimostrare assai semplicemente quattro teoremi generali, sulle superficie congiunte, correlativi di quelli che l'illustre CHASLES diede recentemente sulle superficie omofocali **).

13. Posto:

$$A'=A+\lambda S\,,\qquad B=\mu U+A\,,\qquad B'=\mu' U+A'\,,$$

avremo:

$$\mu' B-\mu B'=\mu' A-\mu A'\,,\qquad B-B'=(\mu-\mu')U-\lambda S\,;$$

dunque:

Teorema 1.° *Date due superficie* A, A' *congiunte rispetto ad un punto* O, *ed un'altra superficie qualunque* U, *se per le due curve* (UA), (UA') *si fanno passare rispettivamente due superficie* B, B'; *per la curva* (BB') *si potrà far passare una superficie congiunta ad* A, A' *ed un'altra superficie congiunta ad* U, *rispetto allo stesso punto* O.

Se la superficie U riducesi al sistema di due piani u, u', si ha:

a) *Date due superficie* A, A' *congiunte rispetto ad un punto* O, *segate da due piani* u, u', *se si fa passare una superficie* B *per le sezioni di* A *ed una superficie* B' *per le sezioni di* A'; *per la curva* (BB') *si potrà far passare uua superficie congiunta con* A, A' *rispetto ad* O, *ed un'altra superficie di cui* O *sia un punto focale ed* u, u' *i relativi piani direttori.*

I piani u, u' passino per O:

b) *Date due superficie* A, A' *congiunte rispetto ad un punto* O, *segate da due piani* u, u' *passanti per* O; *se si fa passare una superficie* B *per le sezioni di* A *ed una superficie* B' *per le sezioni di* A'; *per la curva* (BB') *si potrà far passare una superficie congiunta con* A, A' *rispetto ad* O, *ed un cono* (*di second'ordine*) *di cui* O *sia il vertice ed* u, u' *i piani ciclici.*

*) Vedi la Memoria di AMIOT sulle superficie di second'ordine (*Liouville t.* 8).

**) *Comptes rendus,* 1860, n. 24.

Se i piani u, u' coincidono si ha:

c) *Date due superficie* A, A' *congiunte rispetto ad un punto* O, *se si descrivono due altre superficie* B, B' *tangenti rispettivamente alle date lungo le sezioni fatte da uno stesso piano* u, *per la curva* (BB') *si potrà far passare una superficie congiunta con* A, A' *rispetto ad* O, *ed una superficie di rotazione avente un fuoco in* O *ed* u *per relativo piano direttore.*

d) *Date due superficie* A, A' *congiunte rispetto ad un punto* O, *se si descrivono due altre superficie* B, B' *tangenti rispettivamente alle date lungo le sezioni fatte da uno stesso piano* u *passante per* O; *per la curva* (BB') *si potrà far passare una superficie congiunta con* A, A' *rispetto ad* O, *ed un cono di rotazione avente il vertice in* O *e l'asse perpendicolare al piano* u.

Se il piano u va tutto all'infinito si ha:

e) *Date due superficie* A, A' *congiunte rispetto ad un punto* O, *se si descrivono due altre superficie* B, B' *rispettivamente omotetiche alle date; per la curva* (BB') *si potrà far passare una superficie congiunta ad* A, A' *rispetto ad* O, *ed una sfera il cui centro sia lo stesso punto* O.

14. Sia A un cono congiunto ad A'; U il sistema di due piani tangenti ad A; B il piano delle due generatrici di contatto. Il teorema 1.° dà:

f) *Data una superficie* A' *ed un suo cono congiunto* A *rispetto ad un punto* O, *se* A' *vien segata da due piani tangenti di* A *e per le due coniche di sezione si fa passare una superficie* B', *questa toccherà lungo una stessa conica una superficie congiunta con* A' *rispetto ad* O, *ed un'altra superficie per la quale* O *è un punto focale, ed i due piani tangenti di* A *sono i relativi piani direttori. E la conica di contatto sarà nel piano delle due generatrici di contatto del cono* A.

Sia U una sfera col centro O; A il suo cono assintotico; B sarà una sfera concentrica ad U; onde:

g) *Date due sfere concentriche* U, B, *ed una superficie qualunque* A', *se per la curva* (UA') *si fa passare una superficie* B'; *per la curva* (BB') *passerà una superficie congiunta ad* A' *rispetto al centro di* U *e* B.

Se B si riduce al centro di U, abbiamo:

h) *Data una sfera* U *ed una superficie qualunque* A', *se per la curva* (UA') *si fa passare una superficie* B', *si potrà determinare un'altra superficie che sia concentrica ed omotetica con* A', *e congiunta con* B' *rispetto al centro di* U.

15. Posto:

$$A' = A + \lambda S, \qquad B = \mu U + A,$$

avremo:

$$\mu U + A' = B + \lambda S;$$

dunque:

Teorema 2.° *Date due superficie* A, A' *congiunte rispetto ad un punto* O *ed una superficie qualsivoglia* U, *se per la curva* (UA) *si fa passare una superficie* B; *si potrà per la curva* (UA') *far passare una superficie* B' *congiunta a* B *rispetto allo stesso punto* O.

Sia A un cono congiunto ad A'; U un piano passante pel vertice di A:

k) *Data una superficie* A' *ed un cono* A *congiunto ad essa rispetto ad un punto* O; *descritto un altro cono* B *che tocchi* A *lungo due generatrici; si potrà inscrivere in* A' *una superficie* B' *congiunta al cono* B *rispetto al punto* O; *e la curva di contatto fra* A' *e* B' *sarà nel piano delle due generatrici di contatto fra i coni* A *e* B.

Si prenda per B il sistema di due piani tangenti al cono A:

l) *Data una superficie* A' *ed un cono* A *congiunto ad essa rispetto ad un punto* O; *due piani tangenti di* A *sono i piani direttori, relativi al punto focale* O, *di una superficie* B' *inscritta in* A'; *la curva di contatto di queste superficie è nel piano delle generatrici lungo le quali il cono* A *è toccato dai due suoi piani tangenti.*

La superficie U sia circoscritta ad A lungo una conica il cui piano sia B. Il teorema 2.° da:

m) *Date due superficie* A, A' *congiunte rispetto ad un punto* O, *ed un'altra superficie* U *tangente ad* A *lungo una conica, per la curva* (UA') *si potrà far passare una superficie di rotazione avente un fuoco in* O *e per relativo piano direttore il piano del contatto fra* U *ed* A.

Sia A un cono congiunto ad A'; U il sistema di due piani tangenti ad A; B il piano delle due generatrici di contatto. Avremo:

n) *Data una superficie* A' *ed un cono* A *congiunto ad essa rispetto ad un punto* O; *se* A' *vien segata da due piani tangenti di* A, *per le due coniche di sezione si potrà far passare una superficie di rotazione avente un fuoco in* O, *e per relativo piano direttore il piano delle due generatrici, lungo le quali il cono* A *è toccato dai due suoi piani tangenti.*

p) *Data una superficie* A' *ed un cono* A *congiunto ad essa rispetto ad un punto* O; *se* A *vien segato da un piano passante pel suo vertice e per* O, *secondo due generatrici; i piani tangenti ad* A *lungo queste generatrici segano* A' *in due coniche, per le quali si può far passare un cono di rotazione avente il vertice in* O *e l'asse perpendicolare al piano delle due generatrici di* A.

16. Posto:

$$A' = \lambda' S + A, \qquad A'' = \lambda'' S + A$$

$$B' = \mu' U + A', \qquad B'' = \mu'' U + A'',$$

se ne ricava:

$$\lambda'' B' - \lambda' B'' = (\lambda'' \mu' - \lambda' \mu'') U + (\lambda'' - \lambda') A;$$

dunque:

Teorema 3.° *Date tre superficie* A, A', A'' *congiunte rispetto ad un punto* O, *ed una superficie qualsivoglia* U, *se per le curve* (UA'), (UA'') *si fanno passare rispettivamente le superficie* B', B''; *le curve* (B'B''), (UA) *saranno situate su di una stessa superficie* (*di second'ordine*).

La superficie U sia un piano:

q) *Date tre superficie congiunte* A, A', A'' *segate da uno stesso piano, se si inscrivono rispettivamente in* A', A'' *lungo le rispettive sezioni due superficie* B', B''; *si potrà per la curva* (B' B'') *far passare una superficie tangente ad* A *lungo la sezione in essa fatta dal piano dato.*

Le superficie A, A', A'' siano tre coni congiunti, U il piano de' loro vertici; B il sistema dei piani tangenti ad A' lungo le generatrici, in cui questo cono è segato dal piano U; B'' il sistema dei piani tangenti ad A'' lungo le generatrici in cui quest'ultimo cono è segato dal medesimo piano U. Il teorema 3.° ci dà:

r) *Dati tre coni congiunti, ciascuno segato secondo due generatrici dal piano determinato dai loro vertici, se si conducono i piani tangenti al primo cono e i piani tangenti al secondo lungo le rispettive generatrici d'intersezione, i due primi piani tangenti segano gli altri due in quattro rette, situate in uno stesso cono* (*di second'ordine*) *tangente al terzo de' coni dati lungo le due generatrici in cui questo è segato dal piano dei tre vertici.*

17. Posto:

$$A = U + aV, \quad B = U + bV, \quad C = U + cV,$$
$$A' = A + a'S, \quad B' = B + b'S,$$

avremo:

$$(c-b)\,A' + (a-c)\,B' = (a-b)\,C + \Big(a'\,(c-b) + b'\,(a-c)\Big)\,S$$

ed inoltre:

$$b'A' - a'B' = b'A - a'B\,.$$

Dunque:

Teorema 4.° *Quando tre superficie* A, B, C *passano per una stessa curva, se si prendono due superficie* A', B' *congiunte ordinatamente ad* A, B, *rispetto ad uno stesso punto* O; *per la curva* (A'B') *si può far passare una superficie* C' *congiunta a* C *rispetto ad* O. *E le curve* (ABC), (A'B'C') *sono situate su di una stessa superficie* (*di second'ordine*).

Le superficie A, B siano circoscritte l'una all'altra; per C si prenda il piano della curva di contatto, o il cono involvente A e B lungo questa curva. Si avrà così:

s) *Quando due superficie* A, B *si toccano lungo una conica, se si descrivono due altre superficie* A′, B′ *ordinatamente congiunte a quelle rispetto ad uno stesso punto* O; *per la curva* (A′B′) *passeranno le tre seguenti superficie: una superficie di rotazione avente un fuoco in* O *e per piano direttore il piano del contatto* (AB); *una superficie congiunta, rispetto ad* O, *al cono involvente* A *e* B; *una superficie circoscritta ad* A *e* B *lungo la loro curva di contatto.*

La superficie B sia un cono involvente A; e C sia il piano della curva di contatto:

t) *Date due superficie* A, A′ *congiunte rispetto ad un punto* O, *ed un cono involvente* A; *se si descrive una superficie* B′ *congiunta a* B *rispetto ad* O; *per la curva* (A′B′) *passeranno: una superficie di rotazione avente un fuoco in* O *e per relativo piano direttore il piano del contatto* (AB); *ed una superficie tangente ad* A *lungo la curva di contatto fra* A *e il cono* B.

Sia A un cono, B il sistema di due suoi piani tangenti, C il piano delle due generatrici di contatto.

u) *Data una superficie* A′, *un cono* A *ad essa congiunto rispetto ad un punto* O, *e due piani tangenti di* A; *se si descrive una superficie* B′ *per la quale* O *sia un punto focale, ed i due piani tangenti di* A *siano i relativi piani direttori; per la curva* (A′B′) *passerà una superficie di rotazione avente un fuoco in* O *e per relativo piano direttore il piano delle due generatrici di contatto del cono* A *co' suoi due piani tangenti; e passerà inoltre un cono tangente al cono* A *lungo quelle due generatrici.*

Se il piano delle due generatrici passa per O, la superficie di rotazione menzionata nel precedente teorema è un cono.

Proprietà di una superficie di second'ordine relative ai suoi cilindri congiunti.

18. Data una superficie di second'ordine, dotata di centro, riferita ai suoi piani principali:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0 \tag{1}$$

vogliamo ricercare i suoi *coni congiunti* relativi al centro di essa. Qualunque superficie congiunta colla (1) rispetto al suo centro, ossia passante per la ideale intersezione della (1) col cono immaginario:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0 \tag{2}$$

è rappresentata dall'equazione:

$$(a+\omega)x^2 + (b+\omega)y^2 + (c+\omega)z^2 - 1 = 0 \tag{3}$$

onde tutte quelle superficie sono concentriche ed hanno i medesimi piani principali. L'equazione (3) rappresenta un cono per

$$\omega = \infty\,,\ -a\,,\ -b\,,\ -c\,;$$

epperò, oltre il cono (2), si hanno i tre coni congiunti:

$$(4)\qquad \begin{aligned} &(b-a)\,y^2+(c-a)\,z^2-1=0\\ &(c-b)\,z^2+(a-b)\,x^2-1=0\\ &(a-c)\,x^2+(b-c)\,y^2-1=0 \end{aligned}$$

i quali sono tre *cilindri,* aventi rispettivamente le generatrici parallele agli assi principali della superficie data (1). Noi li chiameremo *i tre cilindri congiunti* della superficie data. Ritenuto $a > b > c$, il primo cilindro è immaginario; il secondo che ha le generatrici parallele ai piani ciclici della (1) è iperbolico; il terzo è ellittico.

Paragonando le equazioni (4) con quelle delle sezioni principali delle superficie (1), risulta che:

Ciascun piano principale di una superficie di second'ordine sega questa e il cilindro congiunto ad esso perpendicolare secondo due coniche aventi le stesse linee congiunte (rispetto al loro centro comune). I tre sistemi di linee congiunte comuni sono le intersezioni del piano principale cogli altri due cilindri congiunti e col cono immaginario congiunto (2).

Ciascuno de' tre cilindri congiunti individua gli altri due; e se prendiamo a considerare l'iperbole e l'ellisse, basi de' due cilindri reali, ciascuna di queste coniche ha due vertici nelle linee congiunte reali dell'altra.

Segue da ciò:

Quando due superficie di second'ordine hanno le sezioni principali rispettivamente dotate delle stesse linee congiunte (rispetto al loro centro comune), esse hanno i medesimi cilindri congiunti. E reciprocamente, se due superficie di second'ordine hanno un cilindro congiunto comune, le loro sezioni principali avranno rispettivamente le stesse linee congiunte.

19. I teoremi n) e p), n. 15, applicati alla superficie data e ad un suo cilindro congiunto, somministrano:

Due piani tangenti ad un cilindro congiunto di una superficie di second'ordine segano questa secondo due coniche per le quali si può far passare una superficie di rotazione avente un fuoco nel centro della superficie data. Il relativo piano direttore è il piano delle due generatrici di contatto del cilindro coi suoi due piani tangenti.

Data una superficie di second'ordine, se un piano condotto pel centro di essa, parallelamente ad un cilindro congiunto, sega questo in due generatrici; i piani tangenti *al cilindro lungo queste generatrici segano la superficie data in due coniche, per le quali passa un cono di rotazione concentrico alla medesima superficie data. L'asse di questo cono è perpendicolare al piano segante il cilindro congiunto.*

Reciprocamente:

I cilindri congiunti di una superficie di second'ordine sono l'inviluppo dei piani delle coniche d'intersezione di questa superficie colle superficie di rotazione, omologiche ad essa, ed aventi un fuoco nel centro della data. Inoltre gli stessi cilindri sono il luogo delle rette d'intersezione dei piani delle coniche anzidette coi piani direttori delle superficie di rotazione, relativi al loro fuoco comune.

Segue dal precedente teorema che:

Data una superficie di second'ordine, i piani assintoti del suo cilindro congiunto iperbolico la segano in due cerchi pe' quali passa una sfera concentrica alla superficie data.

Se la superficie (1) è un ellissoide, il cilindro congiunto ellittico le è tutto esterno, epperò nessun piano tangente di questo incontra quella. Invece il cilindro iperbolico congiunto ha quattro piani tangenti comuni all'ellissoide, i quali costituiscono i limiti di separazione fra quei piani tangenti del cilindro che segano l'ellissoide e quelli che non lo segano.

Se la superficie (1) è un iperboloide ad una falda, tutt'i piani tangenti de' due cilindri congiunti reali segano effettivamente la superficie data.

Se la superficie (1) è un iperboloide a due falde, essa non è incontrata da alcun piano tangente del cilindro iperbolico congiunto. Il cilindro ellittico ha quattro piani tangenti comuni colla superficie data, i quali separano i piani del cilindro che segano l'iperboloide da quelli che non lo segano.

20. Il teorema l), n.° 15, applicato alla superficie (1) e ad un suo cilindro congiunto, diviene:

Due qualisivogliano piani tangenti di un cilindro congiunto di una data superficie di second'ordine sono i piani direttori, relativi al centro di questa, preso come punto focale, di un'altra superficie di second'ordine inscritta nella data lungo una conica, il cui piano passa per le due generatrici di contatto del cilindro co' suoi due piani tangenti.

E come caso particolare:

I due piani assintoti del cilindro iperbolico congiunto ad una data superficie di second'ordine sono i piani ciclici del cono assintotico della superficie data.

21. I teoremi f), n.° 14 ed u), n.° 17 applicati alla superficie (1) danno:

Data una superficie di second'ordine, un suo cilindro congiunto e due piani tangenti di questo, se immaginiamo:

1.° *La serie infinita delle superficie di second'ordine che si possono far passare per le due coniche, intersezioni della data superficie co' due piani tangenti del cilindro congiunto;*

2.° *La serie infinita delle superficie, aventi un punto focale nel centro della data e per relativi piani direttori, i due piani tangenti del cilindro;*

3.° *La serie infinita delle superficie di rotazione, aventi un fuoco nel centro della superficie data e per relativo piano direttore il piano delle due generatrici, lungo le quali il cilindro congiunto è toccato dai suoi due piani tangenti;*

4.° *La serie infinita de' cilindri tangenti al dato lungo le due generatrici anzidette;*

Le quattro serie sono omografiche;

Due superficie corrispondenti nelle prime due serie si toccano fra loro lungo una conica situata nel piano delle due generatrici del cilindro dato;

Tre superficie corrispondenti nelle ultime tre serie passano per una stessa curva situata sulla superficie data.

22. È evidente la corrispondenza fra le proprietà de' cilindri congiunti e quelle delle *coniche eccentriche* o *focali* in una superficie di second' ordine. Ed invero le une si deducono dalle altre col metodo delle polari reciproche, assumendo, come superficie direttrice, una sfera concentrica alla superficie data. Io ho applicato questo processo di trasformazione alle belle proprietà delle coniche eccentriche enunciate dal sig. Chasles nella *Nota XXXI* del suo *Aperçu historique*, e ne ho così ricavato buona parte de' risultati che seguono.

In primo luogo ne ho dedotto il seguente teorema che inchiude una nuova definizione dei cilindri congiunti:

Data una superficie di second' ordine (*di centro* O) *ed un punto qualunque* m *nello spazio, s' immagini la retta* l *intersezione del piano polare di* m (*relativo alla superficie data*) *col piano condotto per* O *perpendicolarmente al raggio vettore* Om. *Se ora pel punto* m *e per la retta* l *conduciamo rispettivamente una retta ed un piano paralleli ad un asse principale della superficie data, la retta sarà la polare del piano relativamente ad un cilindro determinato, qualunque sia il punto* m. *Questo cilindro, parallelo all'asse principale nominato, è uno de' congiunti della superficie data.*

Ossia:

Data una superficie di second' ordine, ed un punto m *situato comunque nello spazio, se si prenda il piano polare di* m *rispetto alla superficie, ed il piano polare, relativamente ad un cilindro congiunto, della retta condotta per* m *parallela al cilindro, la retta comune ai due piani polari ed il punto* m *sono veduti dal centro della superficie data sotto angolo retto.*

Quando il punto m è preso sulla data superficie, il suo piano polare relativo a questa è il piano tangente. In tal caso, la retta intersezione del piano tangente col piano condotto per O perpendicolarmente al raggio vettore Om, può chiamarsi, in difetto d' altra denominazione, *polonormale.*

Quindi dal precedente teorema ricaviamo:

Se una retta parallela ad un cilindro congiunto di una superficie di second'ordine incontra questa in due punti, le polonormali di questi punti giacciono nel piano polare di quella retta relativo al cilindro.

23. Se sulla data superficie si fa partire un piano tangente da una posizione iniziale M qualsivoglia, e si fa variare secondo una legge arbitraria, in modo ch'esso generi una superficie sviluppabile circoscritta, la relativa polonormale descriverà, in generale, una superficie gobba. Ma v'hanno per ogni data posizione iniziale del piano tangente (e quindi per ogni dato punto della superficie proposta) due direzioni, per ciascuna delle quali la polonormale del piano tangente mobile genera una superficie sviluppabile. Variando secondo queste *due direzioni principali*, il piano tangente genera due superficie sviluppabili, circoscritte alla data, tali che le loro caratteristiche, situate nel comune piano tangente M, sono vedute dal centro O sotto angolo retto. Chiameremo *principali* sì le due or accennate superficie sviluppabili, che le loro caratteristiche.

Quindi in ogni piano M tangente alla superficie abbiamo queste tre rette, degne di nota: la polonormale, e le due caratteristiche principali. Queste due ultime passano pel punto di contatto del piano tangente: tutte e tre insieme poi determinano col centro O una terna di piani ortogonali, i quali sono i piani principali comuni ai coni che hanno il vertice O, e che passano rispettivamente per le sezioni fatte dal piano M ne' tre cilindri congiunti. Ossia:

In un piano tangente qualunque d'una superficie di second'ordine, la polonormale e le caratteristiche principali formano un triangolo coniugato comune alle tre coniche, secondo le quali il piano tangente sega i tre cilindri congiunti. Le rette, che uniscono i vertici di questo triangolo al centro della superficie, sono gli assi principali comuni ai tre coni che, avendo il vertice al centro anzidetto, hanno per basi quelle coniche.

Ogni piano condotto pel raggio vettore, che va al punto di contatto del piano tangente, sega uno di questi coni secondo due generatrici egualmente inclinate al raggio vettore; dunque:

Se una retta tangente ad una superficie di second'ordine incontra un cilindro congiunto in due punti, le rette condotte da questi al centro della superficie data formano angoli eguali col raggio vettore che va al punto di contatto della retta tangente.

Al penultimo teorema può darsi anche quest'enunciato:

Se per la polonormale e per le caratteristiche principali di un piano tangente qualunque di una superficie di second'ordine si conducono tre piani paralleli ad uno stesso asse della superficie, questi piani saranno coniugati rispetto al cilindro congiunto parallelo a quell'asse.

Ed inoltre:

Se la superficie data è un iperboloide ad una falda, i piani condotti pel centro e per due generatrici poste in uno stesso piano tangente sono i piani ciclici comuni ai tre coni aventi il vertice al centro e per basi le tre coniche nelle quali il piano tangente sega i tre cilindri congiunti della superficie data.

24. I precedenti teoremi si riferiscono ad un piano tangente; quello che segue risguarda un piano trasversale qualsivoglia.

Se un piano qualunque sega una data superficie di second' ordine, ed i suoi cilindri congiunti, le sezioni risultanti sono vedute dal centro della data superficie secondo coni omociclici. Per conseguenza ogni piano tangente comune a due di questi coni li tocca secondo due rette ortogonali.

Da cui segue immediatamente:

Se un cono concentrico ad una superficie di second' ordine la sega in una conica piana, i piani principali di quello determinano sul piano della sezione tre rette tali, che i piani condotti per esse parallelamente ad un cilindro congiunto sono coniugati rispetto a questo cilindro medesimo.

Il precedente teorema può anche enunciarsi così:

Data una superficie di second' ordine, se in un piano qualunque si determina quel triangolo che è coniugato rispetto alla superficie e che col centro di questa forma tre piani ortogonali, i piani condotti pei lati di esso parallelamente ad un cilindro congiunto sono coniugati rispetto a questo cilindro.

Ha luogo anche la seguente proprietà:

Il piano di un triangolo veduto dal centro di una data superficie di second'ordine sotto angoli retti, un vertice del quale scorra sulla superficie data, mentre gli altri due vertici scorrono sui due cilindri congiunti reali, inviluppa una sfera avente per diametro il diametro della superficie data parallelo al cilindro congiunto immaginario.

Se il piano trasversale passa pel centro della data superficie, il primo teorema del presente numero diviene:

Ogni piano diametrale d'una superficie di second'ordine sega questa ed i cilindri congiunti secondo coniche aventi le stesse linee congiunte.

25. Passo ora ad esporre alcune proprietà segmentarie.

Se una retta condotta pel centro di una superficie di second' ordine incontra questa in m *ed un cilindro congiunto in* n, *la quantità*

$$\left(\frac{1}{Om}\right)^2-\left(\frac{1}{On}\right)^2$$

è costante, qualunque sia la direzione della trasversale; ed invero è eguale all' inverso quadrato del semidiametro della superficie data, parallelo a quel cilindro.

26. Se consideriamo uno de' cilindri congiunti ad una superficie di second' ordine, le rette polari delle sue generatrici, relativamente alla superficie data, sono nel piano principale perpendicolare al cilindro e inviluppano una conica, i cui assi coincidono in direzione con quelli della conica base del cilindro stesso. Data una generatrice del cilindro, il piede della quale sul piano principale sia i, conducasi in i la tangente alla base del cilindro. Su questa tangente prendasi un punto t in modo che i raggi vettori Oi, Ot siano ortogonali. Allora la retta polare della generatrice passerà per t.

Immaginiamo ora la *conica focale* o *eccentrica* situata nel piano principale che si considera; gli assintoti di essa siano incontrati dalla polare della generatrice ne' punti p, q. I raggi vettori Op, Oq incontrino in p', q' un piano tangente M qualsivoglia della superficie data. Sia N il piano tangente al cilindro lungo la generatrice immaginata; e la retta condotta per O, centro della superficie data, normalmente al piano determinato da O e dall'intersezione dei piani M, N, incontri questi due piani in m, n. Allora la quantità:

$$\left(\frac{1}{Om}-\frac{1}{On}\right)^2 : \left(\frac{1}{Op'}-\frac{1}{Op}\right)\left(\frac{1}{Oq'}-\frac{1}{Oq}\right)$$

rimane costante, comunque siano scelti i piani M, N. Ossia:

Assunti ad arbitrio un piano tangente M *di una superficie di second' ordine ed un piano tangente* N *di un suo cilindro congiunto, e trovati i due punti* p, q *in cui gli assintoti della conica focale, situati nel piano principale perpendicolare al cilindro, sono incontrati dalla retta polare della generatrice di contatto del piano* N, *rispetto alla superficie data; se i raggi vettori condotti dal centro* O *di questa ai punti* p, q *incontrano il piano* M *in* p', q'; *e se la perpendicolare condotta per* O *al piano vettore della retta intersezione di* M, N *incontra questi piani in* m, n; *la quantità*

$$\left(\frac{1}{Om}-\frac{1}{On}\right)^2 : \left(\frac{1}{Op'}-\frac{1}{Op}\right)\left(\frac{1}{Oq'}-\frac{1}{Oq}\right)$$

è costantemente eguale al prodotto dell' inverso quadrato del semiasse della data superficie parallelo al cilindro considerato, moltiplicato per la differenza dei quadrati degli altri due semiassi.

Questo teorema, se vuolsi che gli elementi in esso considerati siano tutti reali, non può riferirsi che al cilindro perpendicolare a quel piano principale che contiene la focale iperbolica. Per l'altro cilindro, può darsi al teorema quest' altro enunciato:

Assunti ad arbitrio un piano M *tangente ad una superficie di second' ordine, ed un piano* N *tangente ad un cilindro congiunto, e condotto il piano* P *per la polare della generatrice di contatto di questo cilindro e pel punto in cui il piano* M *incontra un assin-*

toto della focale iperbolica; se la perpendicolare condotta pel centro O *della data superficie al piano vettore della retta intersezione di* M, N *incontra questi piani in* m, n; *e se la perpendicolare condotta per* O *al piano vettore della intersezione di* M, P *incontra questi piani in* m', p; *la quantità*

$$\left(\frac{1}{Om}-\frac{1}{On}\right):\left(\frac{1}{Om'}-\frac{1}{Op}\right)$$

è costante, comunque siano scelti i piani M, N.

Il primo enunciato è stato ricavato, mediante la trasformazione polare, dal teorema fondamentale della memoria del sig. Amiot (t. 8.° del giornale di *Liouville*). L'altro enunciato fu dedotto collo stesso mezzo, da un teorema dimostrato nell' eccellente opera di Plücker: *System der Geometrie des Raumes* (2ª edizione Düsseldorf, 1852; pag. 292).

27. Gli assintoti della focale iperbolica hanno un'altra interessante proprietà che si connette con quelle de' cilindri congiunti.

Abbiamo già veduto che due piani tangenti qualsivogliano di un cilindro congiunto sono i piani d'omologia per la superficie data e per una superficie di rotazione avente un fuoco nel centro della data e per relativo piano direttore il piano delle due generatrici di contatto del cilindro. Or bene: *i centri d'omologia per tali superficie sono situati negli assintoti della focale che è nel piano perpendicolare al cilindro.* Ossia:

Due punti presi ad arbitrio rispettivamente sugli assintoti della focale iperbolica di una data superficie di second'ordine sono i vertici di due coni inviluppanti simultaneamente la superficie data ed una superficie di rotazione avente un fuoco nel centro della data. Queste due superficie si segano in due coniche, i cui piani toccano il cilindro congiunto perpendicolare al piano della focale iperbolica.

I piani tangenti ad una superficie di second'ordine ne' quattro punti in cui questa è incontrata dagli assintoti della focale iperbolica sono tangenti anche al cilindro congiunto perpendicolare al piano della focale, e sono i limiti di separazione fra i piani tangenti di questo cilindro che segano e quelli che non segano la superficie data.

Questi quattro piani tangenti, che sono reali soltanto per l'ellissoide e per l'iperboloide a due falde, posseggono le proprietà polari reciproche degli ombelichi.

Proprietà di più superficie di second'ordine aventi gli stessi cilindri congiunti.

28. Data una superficie di second' ordine:

$$ax^2+by^2+cz^2-1=0$$

l'equazione generale di tutte le superficie aventi in comune con essa i cilindri congiunti, ossia l'equazione generale della superficie congiunta colla data è:

$$(a+\omega)x^2+(b+\omega)y^2+(c+\omega)z^2-1=0 \tag{1}$$

onde tutte quelle superficie hanno in comune, oltre i piani principali, anche le direzioni dei piani ciclici. Ciò si può esprimere dicendo:

I coni assintotici di più superficie congiunte sono omociclici.

Dall'esame dell'equazione (1) facilmente si desume che tutte le superficie congiunte ad una data si dividono in tre gruppi: ellissoidi, iperboloidi ad una falda, iperboloidi a due falde. Due superficie qualunque non hanno alcun punto reale comune. Gli ellissoidi sono tutti situati entro il cilindro ellittico congiunto. Questo è circondato dagli iperboloidi ad una falda che sono tutti disposti fra le superficie convesse de' due cilindri congiunti. Finalmente le due falde del cilindro iperbolico contengono nella loro concavità le due falde di ogni iperboloide non rigato. Dunque il cilindro ellittico separa gli ellissoidi dagli iperboloidi ad una falda: ed il cilindro iperbolico divide questi dagli iperboloidi a due falde. Ossia:

Data una superficie di second' ordine e per conseguenza dati anco i suoi due cilindri congiunti (reali), per un punto qualunque dello spazio si può sempre far passare una, ed una sola, superficie (reale) congiunta alla data. Tale superficie è un ellissoide o un iperboloide ad una falda o un iperboloide a due falde, secondo che quel punto si trova o dentro il cilindro ellittico, o fra le superficie convesse de' due cilindri, o entro il concavo del cilindro iperbolico.

Gli ellissoidi hanno tutti l'asse maggiore parallelo al cilindro ellittico, e l'asse medio parallelo alle generatrici del cilindro iperbolico. La serie degli ellissoidi comincia dal punto che è centro comune di tutte le superficie e può risguardarsi come un'ellissoide di dimensioni nulle, e finisce col cilindro ellittico, il quale si può considerare come un ellissoide avente un asse infinito.

Ciascun iperboloide rigato ha l'asse immaginario parallelo alle generatrici del cilindro ellittico, e il maggior asse reale parallelo alle generatrici del cilindro iperbolico. La serie degli iperboloidi ad una falda comincia col cilindro ellittico e finisce col cilindro iperbolico.

Ogni iperboloide a due falde ha gli assi immaginari rispettivamente paralleli alle generatrici de' due cilindri congiunti. La serie degli iperboloidi a due falde comincia col cilindro iperbolico e prosegue indefinitamente, senza limite reale.

29. Un piano qualunque:

$$tx+uy+vz+1=0$$

tocca la superficie (1), purchè sia soddisfatta la condizione:

$$\frac{t^2}{a+\omega}+\frac{u^2}{b+\omega}+\frac{v^2}{c+\omega}=1$$

equazione cubica in ω, avente tre radici sempre reali, l'una maggiore di $-c$, la seconda compresa fra $-c$ e $-b$, la terza compresa fra $-b$ e $-a$. Dunque:

Un piano qualunque tocca sempre tre superficie congiunte ad una data: un ellissoide e due iperboloidi di specie diversa.

Siano λ, μ, ν le tre radici dell'equazione cubica in ω, cioè i parametri delle tre superficie toccate dal piano proposto; abbiamo:

$$\begin{aligned}(a-b)(a-c)t^2 &= (a+\lambda)(a+\mu)(a+\nu)\\ (b-c)(b-a)u^2 &= (b+\lambda)(b+\mu)(b+\nu)\\ (c-a)(c-b)v^2 &= (c+\lambda)(c+\mu)(c+\nu).\end{aligned}$$

Evidentemente le λ, μ, ν si ponno assumere come *coordinate ellittiche tangenziali* nello spazio. Le formole precedenti servono per passare dalle coordinate tangenziali di Plücker t, u, v alle nuove.

30. I tre punti, in cui un piano arbitrario tocca tre superficie congiunte ad una data, godono di questa importante proprietà:

Un piano qualunque tocca tre superficie congiunte ad una data in tre punti che uniti al centro di questa determinano tre rette ortogonali. Inoltre, *le rette che uniscono a due a due i punti di contatto sono, per ciascuna delle tre superficie toccate, la polonormale e le due caratteristiche principali, corrispondenti al piano tangente comune.*

Dunque:

Se più superficie congiunte sono segate da un piano qualsivoglia in altrettante coniche, queste sono vedute dal centro comune delle superficie sotto coni omociclici. Gli assi principali di questi coni incontrano il piano dato ne' punti ove questo tocca tre delle superficie congiunte; e i piani ciclici dei medesimi coni passano per le generatrici, poste nel piano dato, dell'iperboloide rigato che è una di queste tre superficie.

Rammentando che cosa intendiamo per superficie sviluppabile *principale* circoscritta ad una data superficie qualsivoglia, segue dai precedenti teoremi:

I piani tangenti comuni a due superficie di second'ordine, congiunte, di specie diversa formano una superficie sviluppabile circoscritta che è principale per entrambe le date. Questa sviluppabile ha tre coniche di stringimento ne' piani principali, e la quarta conica all' infinito.

Per ottenere tutte le sviluppabili circoscritte principali di una data superficie di second'ordine, basta combinar questa con tutte le superficie ad essa congiunte, di specie diversa.

È visibile la correlazione fra le proprietà delle sviluppabili circoscritte principali e quelle delle linee di curvatura.

31. Parecchie proprietà, da noi enunciate, rispetto al sistema di una superficie di second'ordine e di un suo cilindro congiunto, non sono che casi particolari di teoremi più generali relativi al sistema di due o più superficie congiunte. Per esempio, il penultimo enunciato del n.° 24 è compreso nel seguente teorema:

Il piano di un triangolo, i cui vertici scorrano rispettivamente su tre superficie di second'ordine congiunte, e siano veduti dal centro comune di queste sotto angoli retti, inviluppa una sfera concentrica alle superficie date. L'inverso quadrato del raggio di questa sfera è eguale alla terza parte della somma algebrica degl'inversi quadrati de' semiassi delle superficie date.

Il primo teorema del n. 19 è in un certo senso, generalizzato nel seguente:

Date due superficie di second'ordine congiunte e due piani tangenti della prima, questi segano la seconda in due coniche, per le quali si può far passare una superficie di second'ordine, avente un punto focale nel centro delle date, e per relativi piani direttori i piani tangenti alla prima superficie, condotti per la retta che unisce i punti di contatto de' piani dati.

Se i piani dati sono paralleli si ha:

Date due superficie di second'ordine congiunte, e due piani paralleli tangenti alla prima di esse, questi segano la seconda in due coniche per le quali passa un cono avente il vertice nel centro delle superficie date, e per piani ciclici i piani tangenti alla prima superficie condotti pel diametro che unisce i punti di contatto de' piani dati.

Così il teorema del n.° 25 è un caso del seguente:

In due superficie congiunte, la differenza degl'inversi quadrati di due semidiametri nella stessa direzione è costante.

Da cui segue:

Quando un ellissoide ed un iperboloide hanno gli stessi cilindri congiunti, il primo è incontrato dal cono assintotico del secondo in punti che sono ad egual distanza dal centro comune delle superficie.

Dimostrasi facilmente anche questa proprietà:

Quando due superficie di second'ordine sono congiunte, se una retta parallela ad un asse incontra una superficie in un punto e l'altra in un altro, i raggi vettori corrispondenti fanno con quell'asse angoli i cui seni sono inversamente proporzionali ai diametri delle superficie diretti secondo l'asse medesimo.

32. È nota l'importanza del teorema d'Ivory relativo ai punti *corrispondenti* nelle superficie omofocali. Ecco le proprietà correlative nelle superficie congiunte.

Date due superficie, congiunte, della stessa specie, chiameremo *corrispondenti* due punti appartenenti rispettivamente ad esse, quando le loro coordinate parallele agli assi principali sono ordinatamente proporzionali ai semidiametri diretti secondo questi assi. E diremo *corrispondenti* anche i piani tangenti ne' punti corrispondenti.

In due superficie congiunte, della stessa specie, la differenza dei quadrati inversi delle distanze di due piani corrispondenti *dal centro comune è costante.* Questo valor costante è la differenza de' quadrati inversi di due semidiametri nella stessa direzione.

Il prodotto delle distanze del centro comune di due superficie congiunte da due piani tangenti rispettivamente ad esse, moltiplicate pel coseno dell'angolo da questi compreso, è eguale all'analoga espressione relativa ai piani corrispondenti.

Se due superficie congiunte della stessa specie sono rispettivamente toccate da due piani, e se pel centro comune O *si conduce la perpendicolare al piano vettore della retta intersezione de' due piani tangenti, la quale li incontri ne' punti* p, q, *l'espressione*

$$\frac{1}{\mathrm{O}p}-\frac{1}{\mathrm{O}q}$$

sarà eguale all'analoga relativa ai piani corrispondenti de' due dati.

33. La forma dell'equazione (1) mostra che *più superficie di second'ordine, aventi i medesimi cilindri congiunti, sono circoscritte ad una stessa curva immaginaria del quart'ordine, a doppia curvatura, per la quale passano tre cilindri di second'ordine (i tre cilindri congiunti), uno de' quali è immaginario, ed un cono immaginario di second'ordine, il quale è il cono assintotico di una sfera qualunque concentrica alle date superficie.* Onde segue che *quella curva gobba immaginaria è projettata sopra due piani principali delle date superficie in coniche reali (ellisse ed iperbole) e sul piano all'infinito in un cerchio immaginario.*

Dunque:

Un sistema di superficie di second'ordine, aventi gli stessi cilindri congiunti, gode di tutte le proprietà ond'è dotato un sistema di superficie di second'ordine passanti per una stessa linea a doppia curvatura del quart'ordine.

Di qui segue, a cagion d'esempio, che:

I piani polari di uno stesso punto arbitrario, relativamente a più superficie congiunte, passano per una stessa retta r. *Questa è la polonormale relativa a quel punto ed alla superficie congiunta che passa per esso. Se il polo percorre una retta* l, *la retta* r *genera un iperboloide passante pel centro delle date superficie e contenente le polari della retta* l.

Il cono assintotico di quest' iperboloide ha tre generatrici rispettivamente parallele agli assi delle superficie date.

Se la retta l *si muove in un piano* P, *il relativo iperboloide passa costantemente per una cubica gobba che contiene il centro delle date superficie ed ha gli assintoti, rispettivamente, paralleli agli assi di queste.*

Questa cubica gobba è anche il luogo dei poli del piano P *relativi alle superficie congiunte. Essa incontra il piano ne' punti in cui questo tocca tre di quelle superficie.*

Tale curva ha tre rami, ciascuno dotato di due assintoti*). Il ramo che passa pel centro delle superficie congiunte ha gli assintoti, rispettivamente paralleli alle generatrici dei cilindri congiunti immaginario ed ellittico. La porzione di esso ramo che dal centro si stende accostandosi all'assintoto parallelo al cilindro ellittico contiene i poli (del piano P) relativi agli ellissoidi del dato sistema. L'altra porzione dello stesso ramo contiene i poli relativi a superficie immaginarie.

Il secondo ramo, che ha gli assintoti rispettivamente paralleli alle generatrici de' cilindri congiunti ellittico ed iperbolico, contiene i poli relativi agli iperboloidi ad una falda.

Il terzo ramo, che ha gli assintoti rispettivamente paralleli alle generatrici de' cilindri congiunti iperbolico ed immaginario, contiene i poli relativi agli iperboloidi a due falde.

34. Una retta arbitraria incontra un sistema di superficie congiunte in punti formanti un'involuzione. Dunque *una retta non può toccare più che due superficie congiunte ad una data.*

I segmenti determinati da più superficie congiunte sopra una retta trasversale sono veduti dal centro di queste sotto angoli che hanno le stesse bisettrici. Le bisettrici passano pei punti in cui la trasversale tocca due superficie congiunte, cioè pei punti doppi dell' involuzione.

Questo teorema comprende in sè il secondo enunciato del n. 23.

Le polonormali relative ai punti in cui una trasversale arbitraria incontra un fascio di superficie congiunte formano un iperboloide passante pel centro di queste superficie.

Se la trasversale è polonormale per una delle superficie congiunte, l'iperboloide diviene un cono, e i piani tangenti condotti per i punti d'incontro della trasversale inviluppano un cono di quarta classe. E se la trasversale è parallela ad un asse delle date superficie, i piani tangenti formano un cono di second'ordine, il cui vertice è nel piano perpendicolare a quell'asse.

Tutte le polonormali che si ponno condurre in un dato piano trasversale ad un fascio

*) Vedi la mia memoria: *Sur quelques propriétés des lignes gauches de troisième ordre et classe (Journal für die reine und angewandte Mathematik,* tom. 58).

di superficie congiunte inviluppano una conica toccata dai piani principali delle superficie date. I punti delle superficie medesime, a cui corrispondono quelle polonormali, sono nella cubica gobba, luogo dei poli del piano trasversale.

Se il piano trasversale è parallelo ad un asse principale delle superficie congiunte, le polonormali in esso situate si dividono in due gruppi. Le polonormali del primo gruppo sono parallele all'asse principale, e i punti delle superficie congiunte, cui esse corrispondono, sono in un' iperbole equilatera, posta nel piano principale perpendicolare a quell' asse, passante pel centro delle superficie date, ed avente gli assintoti paralleli ai due assi principali che sono in quel piano. Le polonormali del secondo gruppo passano per uno stesso punto posto nel piano principale (ov' è l'iperbole equilatera) e corrispondono a punti delle superficie congiunte posti sopra una retta perpendicolare al piano medesimo.

Tutte le polonormali che si ponno condurre da un punto dato ad un fascio di superficie congiunte formano un cono di second'ordine. I punti delle superficie medesime, a cui corrispondono quelle polonormali, sono nella retta, per la quale passano i piani polari del punto dato.

35. Finisco questa memoria, notando la seguente proprietà:

Date più superficie aventi gli stessi cilindri congiunti, uno stesso piano principale, quello cioè perpendicolare al cilindro iperbolico, contiene gli ombelichi di tutte quelle superficie: quattro per ciascuna, a due a due opposti al centro. Il luogo geometrico di due ombelichi opposti è una linea del terzo ordine, per la quale il centro è un flesso e gli assi della sezione principale sono due assintoti; mentre il terzo assintoto, passante anch'esso pel centro è la traccia d'un piano ciclico: la tangente al flesso è perpendicolare a questa traccia. La curva consta di tre parti, cioè di due eguali rami iperbolici situati in due angoli opposti degli assi e di un terzo ramo, contenente i flessi, e avvicinantesi da bande opposte al terzo assintoto.

Il luogo dell'altra coppia di ombelichi è un'altra curva, analoga alla precedente, ma diversamente situata, essendo il suo terzo assintoto la traccia dell'altro piano ciclico; i primi due assintoti e il flesso al centro le sono comuni. I suoi rami iperbolici giacciono negli altri due angoli opposti degli assi.

Bologna, 12 dicembre 1860.