11.

INTORNO ALLE SUPERFICIE DELLA SECONDA CLASSE INSCRITTE IN UNA STESSA SUPERFICIE SVILUPPABILE DELLA QUARTA CLASSE.

Annali di Matematica pura ed applicata, serie I, tomo II (1859), pp. 65-81.

1.° Le proprietà delle coniche inscritte in uno stesso quadrilatero hanno occupato i più illustri geometri moderni, incominciando da EULERO, e venendo sino a STEINER. Essi ebbero specialmente di mira la ricerca della massima ellisse inscritta, e la distribuzione dei centri delle diverse specie di coniche. Questo problema è stato risoluto con mirabile semplicità ed eleganza da PLÜCKER, nel secondo tomo dei suoi *Analytisch-Geometrische Entwicklungen* (pag. 199 e 211), facendo uso delle coordinate tangenziali *(Linien-Coordinaten)*. L'analogo problema, relativo alle coniche circoscritte ad uno stesso quadrigono, è stato trattato e pienamente risoluto in due memorie del professor TRUDI *). La medesima soluzione è enunciata, insieme ad una gran copia di bellissimi teoremi, anche in una recente memoria del signor STEINER **).

Se si estendono queste ricerche alla geometria nello spazio, si presentano due quistioni; l'una risguardante le superficie della seconda classe inscritte in una stessa superficie sviluppabile della quarta classe; l'altra che concerne le superficie del secondo ordine circoscritte ad una medesima linea a doppia curvatura del quart'ordine. La presente memoria si riferisce alla prima di queste quistioni.

Seguendo l'esempio del PLÜCKER, io farò uso delle coordinate tangenziali *(Plan-*

*) Memorie della R. Accademia di Napoli, 1857.

**) Monatsberichte der Berliner Akademie, Juli 1858.

Coordinaten), che sono state introdotte nella geometria analitica a tre dimensioni dal signor CHASLES *) e dal PLÜCKER medesimo **).

2.° È noto che la superficie sviluppabile della quarta classe che inviluppa due superficie della seconda classe contiene in generale quattro coniche; e i piani di queste formano un tale tetraedro *(tetraedro polare)*, che ciascuna sua faccia è il piano polare del vertice opposto rispetto ad una qualunque delle infinite superficie della seconda classe inscritte nella sviluppabile. Assumo uno de' vertici del tetraedro polare (*)) come origine, e gli spigoli in esso concorrenti come assi di ordinarie coordinate rettilinee oblique x, y, z. Sia:

$$tx + uy + vz + w = 0$$

l'equazione di un piano: le quantità $\frac{t}{w}, \frac{u}{w}, \frac{v}{w}$, si denomineranno *coordinate tangenziali* del piano. — Un punto abbia per coordinate ordinarie a, b, c; se per esso passa un piano qualunque:

$$tx + uy + vz + w = 0$$

si avrà:

$$ta + ub + vc + w = 0 .$$

Quest'ultima equazione, nella quale si risguardino $\frac{t}{w}, \frac{u}{w}, \frac{v}{w}$ come le variabili coordinate di un piano, sarà *l'equazione del punto (a, b, c)* in coordinate tangenziali.

Un'equazione qualunque fra le variabili $\frac{t}{w}, \frac{u}{w}, \frac{v}{w}$, coordinate di un piano, rappresenterà la superficie inviluppata dal piano variabile. Se l'equazione conterrà tre sole delle quattro quantità t, u, v, w omogeneamente (ovvero se sarà omogenea rispetto a tre funzioni lineari omogenee delle t, u, v, w), essa rappresenterà una linea piana. Il sistema di due equazioni rappresenta la sviluppabile circoscritta alle due superficie rappresentate dalle singole equazioni.

Avendo assunto tre delle facce del tetraedro polare come piani coordinati, la quarta faccia determini sugli assi positivi tre segmenti l, m, n; allora le equazioni de' quattro vertici del tetraedro polare saranno:

$$w = 0 , \quad lt + w = 0 , \quad mu + w = 0 , \quad nv + w = 0$$

*) Mémoire sur deux principes généraux de la science: la dualité et l'homographie.

**) System der Geometrie des Raumes.

(*)) Supposto tutto reale.

ovvero più semplicemente:

$$w=0\,,\quad t+w=0\,,\quad u+w=0\,,\quad v+w=0$$

ove si assumano per variabili lt, mu, nv in luogo di t, u, v.

3.° Due qualisivogliano fra le quattro coniche determinano le altre due ed anco tutto il sistema di superficie della seconda classe inscritte nella sviluppabile, la quale può risguardarsi come l'inviluppo dei piani tangenti comuni alle due coniche date. Ciò premesso, le equazioni delle quattro coniche saranno, in tutta la loro generalità, esprimibili così:

$$(1)\qquad \begin{array}{lllll} 1.^a & \alpha(t+w)^2+\beta(u+w)^2+\gamma(v+w)^2 & * & =0 \\ 2.^a & * \quad c(u+w)^2-b(v+w)^2 & +\alpha w^2 & =0 \\ 3.^a & -c(t+w)^2 \quad * \quad +a(v+w)^2 & +\beta w^2 & =0 \\ 4.^a & b(t+w)^2-a(u+w)^2 \quad * & +\gamma w^2 & =0 \end{array}$$

ove α, β,... siano costanti reali qualsivogliano, legate dalla condizione:

$$(2)\qquad a\alpha+b\beta+c\gamma=0.$$

Se in luogo di due coniche, supponiamo date due superficie qualunque della seconda classe, riferendole al tetraedro polare, le loro equazioni saranno della forma:

$$\lambda\,(t+w)^2+\mu\,(u+w)^2+\nu\,(v+w)^2+\pi w^2=0$$
$$\lambda'(t+w)^2+\mu'(u+w)^2+\nu'(v+w)^2+\pi' w^2=0$$

ed eliminando da queste successivamente w^2, $(t+w)^2$, $(u+w)^2$, $(v+w)^2$ si otterranno le (1).

L'equazione del centro di una superficie della seconda classe rappresentata da un'equazione fra le coordinate t, u, v, w, si ottiene eguagliandone a zero la derivata rispetto a w; quindi se nella equazione della superficie manca il termine contenente w^2, il centro sarà a distanza infinita. Se adunque fra due delle (1) si elimina w^2, l'equazione risultante:

$$(3)\qquad \alpha' t(t+2w)+\beta' u(u+2w)+\gamma' v(v+2w)=0$$

ove:

$$(4)\qquad \alpha'=c-b+\alpha\,,\quad \beta'=a-c+\beta\,,\quad \gamma'=b-a+\gamma$$

rappresenterà il paraboloide che fa parte del sistema di superficie inscritte nella sviluppabile.

Onde rappresentare, con tutta la desiderabile simmetria, una qualunque delle superficie inscritte, dalla prima delle equazioni (1) sottraggo la (3) moltiplicata pel parametro indeterminato i. Ottiensi così la:

$$A t(t+2w)+B u(u+2w)+C v(v+2w)+D w^2=0 \tag{5}$$

ove:

$$A=\alpha'(\lambda-i)\,,\quad B=\beta'(\mu-i)\,,\quad C=\gamma'(\nu-i)\,,\quad D=\alpha+\beta+\gamma$$

$$\lambda=\frac{\alpha}{\alpha'}\quad \mu=\frac{\beta}{\beta'}\quad \nu=\frac{\gamma}{\gamma'}\,.$$

L'equazione (5) per $i=0,\lambda,\mu,\nu,\infty$ somministra le (1) e la (3).

4.° Il centro della superficie (5) è:

$$At+Bu+Cv+Dw=0 \tag{6}$$

epperò, qualunque sia i, questo punto cade nella retta:

$$\alpha(t+w)+\beta(u+w)+\gamma(v+w)=0\,,\qquad \alpha' t+\beta' u+\gamma' v=0\,. \tag{7}$$

Le coordinate ordinarie del punto (6) sono:

$$\frac{lA}{D}\,,\quad \frac{mB}{D}\,,\quad \frac{nC}{D}$$

dunque, se si indica con δ la distanza dei centri di due superficie del sistema (5), corrispondenti ai parametri i, j, avremo

$$\delta^2=\frac{(i-j)^2\,(l^2\alpha'^2+m^2\beta'^2+n^2\gamma'^2+2pmn\beta'\gamma'+2qnl\alpha'\gamma'+2rlm\alpha'\beta')}{D^2}$$

ove p, q, r sono i coseni degli angoli fra gli assi; quindi se fissiamo come origine delle distanze da misurarsi sulla retta (7) il punto O corrispondente a $j=0$, cioè il centro della *prima* conica (1), il parametro i relativo ad una superficie qualunque del sistema (5) sarà proporzionale alla distanza del suo centro dalla origine medesima. Riteniamo che i centri delle altre tre coniche (1) siano ordinatamente i punti P, Q, R situati da una stessa banda rispetto al punto O, e assumiamo come positive le distanze da O verso P, Q, R, ed i corrispondenti valori del parametro i. Allora avremo:

$$\lambda>0\,,\quad \mu>0\,,\quad \nu>0\,,\quad \lambda<\mu<\nu\,. \tag{8}$$

5.° Formo le funzioni dei coefficienti della equazione (5); dai segni delle quali dipende la specie della superficie di seconda classe rappresentata dall'equazione medesima. Quelle funzioni sono:

$$\Phi = ABC(D - A - B - C)$$

$$\Theta_1 = DBC(D - B - C) \qquad \Xi_1 = A(D - A)$$

$$\Theta_2 = DCA(D - C - A) \qquad \Xi_2 = B(D - B)$$

$$\Theta_3 = DAB(D - A - B) \qquad \Xi_3 = C(D - C)$$

e sostituendo per A, B, C, D i loro rispettivi valori *):

$$(9) \ldots \qquad \Phi \equiv i(\alpha+\beta+\gamma)\,\alpha\beta\gamma\,(\lambda-i)\,(\mu-i)\,(\nu-i)$$

$$(10) \qquad \begin{cases} \Theta_1 \equiv \beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)(\mu-i)(\nu-i)\Big(\alpha+i(\beta'+\gamma')\Big) \\ \Theta_2 \equiv \gamma\alpha(\alpha+\beta+\gamma)(\nu-i)(\lambda-i)\Big(\beta+i(\gamma'+\alpha')\Big) \\ \Theta_3 \equiv \alpha\beta(\alpha+\beta+\gamma)(\lambda-i)(\mu-i)\Big(\gamma+i(\alpha'+\beta')\Big) \end{cases}$$

$$(11) \qquad \begin{cases} \Xi_1 \equiv \alpha(\lambda-i)(\beta+\gamma+i\alpha') \\ \Xi_2 \equiv \beta(\mu-i)(\gamma+\alpha+i\beta') \\ \Xi_3 \equiv \gamma(\nu-i)(\alpha+\beta+i\gamma'). \end{cases}$$

Posto per brevità:

$$(12) \qquad \lambda' = -\frac{\beta+\gamma}{\alpha'} \qquad \mu' = -\frac{\gamma+\alpha}{\beta'} \qquad \nu' = -\frac{\alpha+\beta}{\gamma'}$$

$$(13) \qquad \lambda'' = -\frac{\alpha}{\beta'+\gamma'} \qquad \mu'' = -\frac{\beta}{\gamma'+\alpha'} \qquad \nu'' = -\frac{\gamma}{\alpha'+\beta'}$$

le espressioni superiori divengono:

$$(14) \qquad \begin{cases} \Theta_1 \equiv \beta\gamma(\beta'+\gamma')(i-\mu)(i-\nu)(i-\lambda'')(\alpha+\beta+\gamma) \\ \Theta_2 \equiv \gamma\alpha(\gamma'+\alpha')(i-\nu)(i-\lambda)(i-\mu'')(\alpha+\beta+\gamma) \\ \Theta_3 \equiv \alpha\beta(\alpha'+\beta')(i-\lambda)(i-\mu)(i-\nu'')(\alpha+\beta+\gamma) \end{cases}$$

$$(15) \qquad \Xi_1 \equiv -(i-\lambda)(i-\lambda'), \quad \Xi_2 \equiv -(i-\mu)(i-\mu'), \quad \Xi_3 \equiv -(i-\nu)(i-\nu').$$

Ciò posto, i criteri per distinguere la specie della superficie rappresentata dalla equazione (5) sono i seguenti **).

*) Il simbolo $\equiv$ indica l'eguaglianza di segno.

**) Plücker, *Op. cit.*

Se $\Phi > 0$ la superficie è o reale e rigata, o imaginaria; ha luogo il primo caso se una qualunque delle sei funzioni Θ, Ξ è negativa. Nel secondo caso le sei funzioni sono tutte positive.

Se $\Phi < 0$ la superficie è reale e non rigata: e propriamente è un ellissoide se le funzioni Θ sono tutte positive, e le Ξ tutte negative; invece se un Θ è negativo, ovvero se un Ξ è positivo la superficie è un iperboloide a due falde.

Se $\Phi = 0$ l'equazione (5) rappresenta una conica. Questa è iperbole se le funzioni Θ sono negative; ellisse se le funzioni Θ sono positive, e le Ξ negative; imaginaria se le funzioni Θ e Ξ sono tutte positive.

Le anzidette condizioni non sono però tutte indipendenti fra loro: su di ciò basta osservare quanto segue:

Affinchè la superficie sia ideale basta che si abbia $\Phi > 0$; e che un Θ e un Ξ d'indice diverso siano positivi; allora tutte le sei funzioni Θ e Ξ sono positive.

Affinchè la superficie sia un ellissoide basta che sia $\Phi < 0$, uno dei Θ positivo, e un Ξ d'indice diverso negativo, allora tutt'i Θ sono positivi, e tutt'i Ξ negativi.

Se $\Phi = 0$ tutt'i Θ hanno lo stesso segno.

6.° Il paraboloide (3) è iperbolico o ellittico secondo che la quantità:

$$\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$$

è negativa o positiva. Le quattro coniche (1) sono ordinatamente ellissi o iperboli secondo che i prodotti:

$$abc\,\alpha\beta\gamma\,, \qquad bc\,, \qquad ca\,, \qquad ab$$

sono negativi o positivi. Nel primo caso però, oltre queste condizioni, devono essere soddisfatte anco queste altre, senza le quali le coniche sarebbero ideali:

$$(16) \qquad \left\{\begin{array}{lll} \text{per la 1.}^{\text{a}} \text{ conica} \ldots\ldots & \alpha(\beta+\gamma)<0 & \beta(\gamma+\alpha)<0 \quad \gamma(\alpha+\beta)<0 \\ \text{per la 2.}^{\text{a}} \text{ conica} \ldots\ldots & c(\alpha-b)<0 & b(\alpha+c)>0 \\ \text{per la 3.}^{\text{a}} \text{ conica} \ldots\ldots & a(\beta-c)<0 & c(\beta+a)>0 \\ \text{per la 4.}^{\text{a}} \text{ conica} \ldots\ldots & b(\gamma-a)<0 & a(\gamma+b)>0 \end{array}\right.$$

le quali equivalgono ad una sola condizione per ciascuna conica. Le (8) danno:

$$\beta\gamma(\beta'\gamma-\beta\gamma')>0 \qquad \gamma\alpha(\alpha\gamma'-\alpha'\gamma)<0 \qquad \alpha\beta(\alpha'\beta-\alpha\beta')>0$$

ossia, in virtù delle (4):

$$(17) \qquad a\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)>0 \qquad b\gamma\alpha(\alpha+\beta+\gamma)<0 \qquad c\alpha\beta(\alpha+\beta+\gamma)>0$$

da cui:

$$abc(\alpha+\beta+\gamma)<0 \tag{18}$$

e:

$$bc\beta\gamma<0 \qquad ca\gamma\alpha>0 \qquad ab\alpha\beta<0. \tag{19}$$

Dalla (18) risulta che la prima conica è ellisse (reale o ideale) o iperbole secondo che la quantità:

$$\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$$

è positiva o negativa. Dunque, secondo che il paraboloide è iperbolico o ellittico, anche la prima conica è iperbole o ellisse (reale o ideale).

Dalle (12) e (13), avuto riguardo alle (4) ed alla (2) si hanno le seguenti formole che ci gioveranno in seguito:

$$\lambda-\lambda'=\frac{\alpha+\gamma+\beta}{\alpha'}, \quad \mu-\lambda'=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\beta+a)}{\alpha'\beta'}, \quad \nu-\lambda'=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\gamma-a)}{\alpha'\gamma'} \tag{20, a}$$

$$\lambda-\mu'=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-b)}{\beta'\alpha'}, \quad \mu-\mu'=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\beta'}, \quad \nu-\mu'=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\gamma+b)}{\beta'\gamma'} \tag{20, b}$$

$$\lambda-\nu'=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+c)}{\gamma'\alpha'}, \quad \mu-\nu'=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\beta-c)}{\gamma'\beta'}, \quad \nu-\nu'=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\gamma'} \tag{20, c}$$

$$\frac{\lambda''-\lambda}{\lambda\lambda''}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha}, \quad \frac{\lambda''-\mu}{\mu\lambda''}=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\beta-c)}{\alpha\beta}, \quad \frac{\lambda''-\nu}{\nu\lambda''}=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\gamma+b)}{\alpha\gamma} \tag{21, a}$$

$$\frac{\mu''-\lambda}{\lambda\mu''}=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+c)}{\beta\alpha}, \quad \frac{\mu''-\mu}{\mu\mu''}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\beta}, \quad \frac{\mu''-\nu}{\nu\mu''}=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\gamma-a)}{\beta\gamma} \tag{21, b}$$

$$\frac{\nu''-\lambda}{\lambda\nu''}=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-b)}{\gamma\alpha}, \quad \frac{\nu''-\mu}{\mu\nu''}=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\beta+a)}{\gamma\beta}, \quad \frac{\nu''-\nu}{\nu\nu''}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\gamma}. \tag{21, c}$$

7.° È chiaro che ad una qualunque delle costanti che entrano nelle equazioni (1) si può dare quel segno che più aggrada; fissato il qual segno ad arbitrio, dai segni delle altre costanti dipende la natura delle quattro coniche. Noi riterremo α positivo.

Supporremo inoltre dapprima che le coniche medesime siano tutte reali: al quale uopo basta che in ciascuna delle equazioni (1) i coefficienti non siano nè tutti positivi, nè tutti negativi.

Siccome la specie delle tre ultime coniche dipende dai segni dei prodotti bc, ca, ab, così queste coniche ponno essere tre iperboli, o due ellissi ed una iperbole, ma non altrimenti; anzi determinata la specie di due fra quelle coniche, anche quella della rimanente è affatto individuata.

Osservo poi che avendosi fra i tre prodotti $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ le relazioni (2) e (19), sui loro segni non ponno farsi che le due seguenti ipotesi:

$$a\alpha > 0 \quad b\beta < 0 \quad c\gamma > 0$$

ovvero:

$$a\alpha < 0 \quad b\beta > 0 \quad c\gamma < 0$$

nella prima ipotesi la prima conica è un'ellisse, nella seconda un'iperbole. Ciò premesso è evidente che, ammesse le quattro coniche tutte reali, non ponno darsi che questi quattro casi:

A) Il paraboloide sia ellittico; la prima conica ellisse;

1.° caso: la seconda e terza conica siano ellissi; la quarta iperbole;

2.° caso: le tre coniche siano tutte iperboli.

B) Il paraboloide sia iperbolico; la prima conica iperbole;

3.° caso: le altre tre coniche tutte iperboli;

4.° caso: la seconda conica iperbole, le altre ellissi.

È facilissimo persuadersi che non si ponno fare altre ipotesi. Per esempio, non può supporsi la seconda conica ellisse e la terza iperbole, perchè ciò richiederebbe $bc < 0$, $ca > 0$, epperò per le (19) avrebbesi:

$$\beta\gamma > 0 \quad \gamma\alpha > 0$$

cioè α, β, γ avrebbero segni eguali, e per conseguenza la prima conica sarebbe ideale.

Ora ricerchiamo, in ciascuno de' quattro casi accennati, come siano distribuiti i centri delle varie specie di superficie rappresentate dalla (5) sui cinque segmenti che i punti O, P, Q, R, centri delle coniche (1), determinano sulla retta (7), cioè sulla *locale de' centri*.

A) *Paraboloide ellittico.*

$$\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma) > 0$$

Primo caso.

8.° In questo caso si ha:

$$\alpha > 0 \quad \beta < 0 \quad \gamma < 0, \qquad a > 0 \quad b > 0 \quad c < 0$$

quindi, per la (18):

$$\alpha+\beta+\gamma > 0 \quad \beta+\gamma < 0 \quad \gamma+\alpha > 0 \quad \alpha+\beta > 0$$

e dalle (16):

$$\alpha - b > 0 \quad \alpha + c > 0 \quad \beta - c < 0 \quad \beta + \alpha < 0.$$

Per $i<0$ la (9) e la prima delle (10) danno:

$$\Phi<0\,, \quad \Theta_1>0$$

e la seconda delle (11):

$$\Xi_2<0\,.$$

Per i positivo e compreso fra lo zero e λ la (9) dà $\Phi>0$. Per decidere in questo caso se la superficie (5) sia o non sia reale, si cerchi il segno di Ξ_2. La (12) dà $\mu'>0$, e le (20, b):

$$\lambda-\mu'<0$$

dunque a maggior ragione per $i<\lambda$:

$$i-\mu'<0$$

e conseguentemente dalla seconda delle (15):

$$\Xi_2<0\,.$$

Per i compreso fra λ e μ si ha $\Phi<0$; osservo poi che si ha $\lambda''>0$, e dalle (21, a), (20, b):

$$\lambda''-\mu>0\,, \quad \mu-\mu'<0$$

dunque le (14), (15) ci daranno $\Theta_1>0$, $\Xi_2<0$.

Per i compreso fra μ e ν si ha $\Phi>0$; essendo poi $\nu''>0$ e $\nu''-\lambda<0$ per le (21, c), così dalle (14) avremo $\Theta_3<0$.

Per $i>\nu$ si ha $\Phi<0$, e come dianzi $\Theta_3<0$.

Dunque nel caso presente tutt'i punti della retta (7) sono centri di superficie reali; ed invero abbiamo soltanto

ellissoidi pei punti del segmento indefinito che ha un termine in O;
iperboloidi ad una falda pei punti del segmento OP;
ellissoidi pei punti del segmento PQ;
iperboloidi ad una falda pei punti del segmento QR;
iperboloidi a due falde pei punti del segmento indefinito che comincia in R.

Questi cinque segmenti si denomineranno ordinatamente *primo*, *secondo*, *terzo*, *quarto* e *quinto*.

Secondo caso.

9.° In questo caso si ha:

$$\alpha>0 \quad \beta<0 \quad \gamma>0 \quad a>0 \quad b>0 \quad c>0$$
$$\alpha+\beta+\gamma<0 \quad \beta+\gamma<0 \quad \gamma+\alpha>0 \quad \alpha+\beta<0\,.$$

Per $i<0$ le (9), (10), (11) danno $\Phi<0$, $\Theta_1>0$, $\Xi_2<0$.

Per i compreso fra lo zero e λ si ha $\Phi>0$, ed inoltre dalle (15):

$$\Xi_3<0$$

perchè $\nu'>0$, $\nu-\nu'<0$.

Per i compreso fra λ e μ si ha $\Phi<0$, e dalle (14):

$$\Theta_1<0$$

perchè $\lambda''>0$, $\lambda''-\lambda<0$.

Per i compreso fra μ e ν si ha $\Phi>0$, e dalle (15):

$$\Xi_2<0$$

perchè $\mu-\mu'>0$.

Per $i>\nu$ si ha, come per i compreso fra λ e μ:

$$\Phi<0, \quad \Theta_1<0.$$

Dunque, nel caso attuale, corrispondono superficie reali a tutt'i punti della locale dei centri; e propriamente *ellissoidi* al primo segmento; *iperboloidi ad una falda* al secondo e quarto segmento; *iperboloidi a due falde* al terzo e quinto segmento.

B) *Paraboloide iperbolico*

$$\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)<0.$$

Terzo caso.

10.° Si ha:

$$\alpha>0, \quad \beta<0, \quad \gamma>0, \quad a<0, \quad b<0, \quad c<0$$
$$\alpha+\beta+\gamma>0.$$

Per $i<0$ le (9), (10) danno $\Phi>0$, $\Theta_2<0$.

Per i compreso fra lo zero e λ si ha $\Phi<0$. Inoltre, se $\beta+\gamma>0$ le (11) danno $\Xi_1>0$; se $\beta+\gamma<0$ e $\beta'+\gamma'>0$ le (10) danno $\Theta_1<0$; se $\beta+\gamma<0$ $\beta'+\gamma'<0$ si ha $\lambda''>0$, $\lambda''-\lambda>0$, quindi le (14) danno ancora $\Theta_1<0$.

Per i compreso fra λ e μ si ha $\Phi>0$, e siccome $\mu'>0$ e $\mu-\mu'<0$ così dalle (15) si ha $\Xi_2<0$.

Per i compreso fra μ e ν si ha $\Phi<0$, ed inoltre $\Theta_2<0$ perchè $\mu''>0$, $\mu''-\mu<0$.

Per $i>\nu$ si ha $\Phi>0$, ed inoltre, siccome $\lambda-\lambda'>0$, così le (15) danno $\Xi_1<0$.

Adunque, nel caso attuale, si hanno superficie tutte reali, ed invero tutte *iperboloidi ad una falda* pel primo, terzo e quinto segmento; *a due falde* pel secondo e quarto.

Quarto caso.

11.° In questo caso abbiamo:

$$\alpha>0\,,\quad \beta>0\,,\quad \gamma<0\,,\quad a<0\,,\quad b>0\,,\quad c>0$$
$$\alpha+\beta+\gamma>0\,,\quad \beta-c>0\,,\quad \beta+a>0\,,\quad \gamma-\alpha<0\,,\quad \gamma+b<0\,.$$

Per $i<0$ si ha $\Phi>0$, $\Theta_3<0$.

Per i compreso tra lo zero e λ si ha $\Phi<0$; inoltre, se $\beta'+\gamma'>0$ le (10) danno $\Theta_1<0$; e se $\beta'+\gamma'<0$, si ha $\lambda''>0$, $\lambda''-\lambda>0$, quindi dalle (14) si ha ancora $\Theta_1<0$.

Per i compreso fra λ e μ si ha $\Phi>0$ e $\Xi_3<0$ perchè $\mu-\nu'<0$.

Per i compreso fra μ e ν si ha $\Phi<0$; le (14) danno poi $\Theta_3>0$ perchè $\nu''>0$ e $\nu''-\mu<0$: inoltre, siccome $\lambda-\lambda'>0$, così le (15) danno $\Xi_1<0$.

Per $i>\nu$ si ha $\Phi>0$, e, come poc'anzi, $\Xi_1<0$.

Dunque anche in questo caso otteniamo superficie tutte reali: ed invero corrispondono *iperboloidi ad una falda* al primo, terzo e quinto segmento; *iperboloidi a due falde* al secondo; *ellissoidi* al quarto.

Questi sono i soli casi in cui le quattro coniche siano tutte reali, epperò tutte reali siano anche le superficie rappresentate dalla equazione (5) per valori reali del parametro i. Veniamo ora a considerare i casi in cui alcuna delle coniche (1) sia ideale.

12.° Innanzi tutto, osservando le (1) è facile persuadersi che se una delle quattro coniche è ideale, ve n'ha un'altra pure ideale, e le due rimanenti sono necessariamente reali: anzi i centri delle due coniche ideali sono sempre consecutivi, cioè non ponno darsi che i tre casi seguenti:

5.° caso: che siano ideali la prima e seconda conica; allora la terza è iperbole e la quarta ellisse;

6.° caso: che siano ideali la seconda e la terza conica; le due rimanenti sono iperboli;

7.° caso: che siano ideali la terza e quarta conica; allora la prima è ellisse e la seconda iperbole.

Ecco come può dimostrarsi l'enunciata proprietà. Suppongasi in primo luogo ideale la prima conica, epperò α, β, γ tutti positivi; allora dalle (19) avremo $bc<0$, $ca>0$, $ab<0$; ed inoltre, per la (18), sarà $abc<0$; quindi $a>0$, $b<0$, $c>0$. Dunque la seconda conica è ideale, la terza è un'iperbole, e la quarta un'ellisse reale.

In secondo luogo suppongasi ideale la seconda e reale la prima conica; allora:

$$\alpha>0\,,\quad b<0\,,\quad c>0$$

quindi dalle (19) si ha $\beta\gamma > 0$, epperò, essendo reale la prima conica, $\beta < 0$, $\gamma < 0$, e inoltre $a < 0$. Dunque la terza conica è ideale, la prima e quarta sono iperboli. Ora suppongasi ideale la terza conica e reale la seconda; avremo $\beta > 0$, $a > 0$, $c < 0$, quindi dalle (19): $b\alpha < 0$ e, poichè la seconda conica è reale, $b < 0$, $\alpha > 0$, $\gamma < 0$. Dunque la quarta conica è ideale, la prima è un'ellisse reale, la seconda un'iperbole. Il supporre poi la quarta conica ideale e la terza reale condurrebbe alla conseguenza che $\alpha + \beta + \gamma$ e abc avrebbero lo stesso segno; il che è contrario alla (18).

Nel primo e terzo caso il paraboloide è ellittico; iperbolico nel secondo. Ricerchiamo ora qual sia la distribuzione de' centri delle superficie (5) in ciascuno de' tre casi preaccennati.

Quinto caso.

13.° Abbiamo:

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \gamma > 0, \quad a > 0, \quad b < 0, \quad c > 0.$$

Per $i < 0$ si ha $\Phi < 0$, ma non può essere simultaneamente $\Theta_1 > 0$, $\Xi_2 < 0$, perchè ciò richiederebbe:

$$-i < \frac{\alpha}{\beta' + \gamma'}, \qquad -i > \frac{\gamma + \alpha}{\beta'}$$

il che è evidentemente impossibile.

Per i compreso tra zero e λ si ha $\Phi > 0$, $\Theta_1 > 0$, $\Xi_2 > 0$.

Per i compreso fra λ e μ si ha $\Phi < 0$ e $\Xi_2 > 0$ perchè $\lambda - \mu' > 0$.

Per i compreso fra μ e ν si ha $\Phi > 0$ e $\Theta_1 < 0$ perchè $\lambda'' < 0$.

Per $i > \nu$ si ha $\Phi < 0$, $\Theta_1 > 0$, $\Xi_2 < 0$.

Dunque in questo caso corrispondono *iperboloidi a due falde* al primo e terzo segmento, *iperboloidi ad una falda* al quarto, *ellissoidi* al quinto, *superficie ideali* al secondo.

Sesto caso.

14.° Si ha:

$$\alpha > 0, \quad \beta < 0, \quad \gamma < 0, \quad a < 0, \quad b < 0, \quad c > 0.$$

Per $i < 0$ si ha $\Phi > 0$, $\Theta_1 < 0$.

Per i compreso fra lo zero e λ si ha $\Phi < 0$, ma non può essere simultaneamente $\Theta_1 > 0$, $\Xi_2 < 0$, poichè ciò richiederebbe:

$$\alpha + i(\beta' + \gamma') < 0 \qquad \gamma + \alpha + i\beta' > 0$$

da cui:

$$\gamma - i\gamma' > 0$$

cioè:

$$-i\gamma' > -\gamma$$

ossia, essendo γ e γ' quantità negative:

$$i > \frac{\gamma}{\gamma'}$$

epperò i non compreso fra zero e λ.

Per i compreso fra λ e μ si ha $\Phi > 0$; inoltre $\Theta_1 > 0$ perchè $\lambda'' > 0$, $\lambda'' - \lambda < 0$, $\Xi_2 > 0$ perchè $\lambda - \mu' > 0$.

Per i compreso fra μ e ν si ha $\Phi < 0$, $\Theta_1 < 0$.

Per $i > \nu$ si ha $\Phi > 0$ e $\Xi_2 < 0$ perchè $\nu - \mu' > 0$.

Dunque in questo caso corrispondono *iperboloidi ad una falda* al primo e quinto segmento; *iperboloidi a due falde* al secondo e quarto; *superficie ideali* al terzo.

Settimo caso.

15.° In questo caso si ha:

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \gamma < 0, \quad a > 0, \quad b < 0, \quad c < 0.$$

Per $i < 0$ si ha $\Phi < 0$, $\Theta_1 > 0$, $\Xi_3 < 0$.

Per i compreso fra lo zero e λ si ha $\Phi > 0$ e $\Xi_1 < 0$ perchè $\lambda - \lambda' < 0$.

Per i compreso fra λ e μ si ha $\Phi < 0$ e $\Xi_2 > 0$ perchè $\mu - \mu' < 0$.

Per i compreso fra μ e ν si ha $\Phi > 0$, $\Theta_1 > 0$, perchè $\lambda'' > 0$, $\lambda'' - \lambda < 0$, e $\Xi_2 > 0$ perchè $\nu - \mu' < 0$.

Per $i > \nu$ si ha $\Phi < 0$, $\Theta_1 < 0$.

Dunque nel caso attuale corrispondono *ellissoidi* al primo segmento; *iperboloidi ad una falda* al secondo; *iperboloidi a due falde* al terzo e quinto; *superficie ideali* al quarto.

16.° Nelle cose precedenti abbiamo sempre supposto che le equazioni (1) rappresentassero coniche nel significato più generale della parola, cioè *iperboli* od *ellissi* (reali o ideali). Ma una di esse (ed una sola) potrebbe essere una *parabola;* per es. lo sarebbe la quarta se si avesse $\gamma' = 0$. Allora non si ha più paraboloide, perchè l'equazione (3) viene a coincidere colla quarta delle (1), avendosi in tal caso:

$$a\alpha' + b\beta' = 0.$$

In questa ipotesi hanno luogo ancora i casi sopra considerati, ad eccezione del settimo, che non può più verificarsi, perchè, essendo attualmente:

$$\gamma + b - a = 0$$

non può più aversi simultaneamente $\gamma < 0$, $a > 0$, $b < 0$. Dalla locale de' centri scompare l'ultimo segmento, e il quarto diviene indefinito, allontanandosi il punto R all'infinito. Pei quattro segmenti che rimangono hanno luogo ancora tutte le conseguenze a cui siamo arrivati pei primi quattro segmenti nel caso generale che il punto R sia a distanza finita.

17.° È interessante il caso che una delle quantità costanti che entrano nelle (1) sia nulla. Sia $\gamma = 0$; allora la prima e la quarta delle (1) coincidono perchè:

$$a\alpha + b\beta = 0$$

e la prima e quarta conica degenerano nel medesimo sistema di due punti, che sono i vertici dei due coni di seconda classe in cui si decompone attualmente la superficie sviluppabile circoscritta. In tal caso la seconda e la terza conica sono quelle nelle quali si segano i coni medesimi.

La distribuzione dei centri delle superficie (5) si deduce dalle conclusioni generali esposte superiormente, supponendo che due punti consecutivi, fra i quattro O, P, Q, R, si riuniscono in un solo. Siano A e B i centri delle due coniche, ed M il punto medio della retta congiungente i vertici de' due coni, il qual punto è sulla retta AB ed è quello in cui si sono riuniti i centri delle due coniche. Se la riunione dei centri di due coniche nel punto M si fa ne' primi quattro casi (numeri 8, 9, 10, 11) risulteranno reali sì le due coniche rimanenti che i vertici dei due coni. Ma se invece assumiamo gli altri tre casi (numeri 13, 14, 15), allora se riuniamo in M i centri delle due coniche ideali, le coniche rimanenti saranno reali, e ideali i vertici de' due coni; se riuniamo in M i centri delle due coniche reali (ove siano consecutivi) le coniche rimanenti saranno ideali, e i vertici de' due coni reali; se da ultimo riuniamo in M i centri di una conica reale e di una ideale, delle due coniche restanti una sola sarà reale, e i vertici de' due coni saranno ideali.

Ecco i risultati che si ottengono per tal modo.

A) Siano reali sì i vertici de' due coni che le due coniche.

a) Sia inoltre il *paraboloide ellittico*. Le coniche ponno essere entrambe ellissi o entrambe iperboli, o di specie diversa. Nel primo e secondo caso i punti A e B sono situati dalla stessa banda rispetto al punto M; nel terzo caso il punto M cade fra A e B.

Nel primo caso corrispondono *iperboloidi a due falde* al segmento indefinito della locale che ha un termine in M; *ellissoidi* al segmento finito che ha pure un termine in M; *iperboloidi ad una falda* al segmento AB; *ellissoidi* all'altro segmento indefinito.

Nel secondo caso corrispondono *ellissoidi* al segmento indefinito che ha un termine in M; *iperboloidi a due falde* al segmento finito che ha pure un termine in M, ed all'altro segmento indefinito; *iperboloidi ad una falda* al segmento AB.

Nel terzo caso corrispondono *iperboloidi ad una falda* ai due segmenti compresi fra A e B; *ellissoidi* all'uno, *iperboloidi a due falde* all'altro de' segmenti indefiniti.

b) Sia il *paraboloide iperbolico;* ponno ancora aver luogo i tre casi poc'anzi accennati, rispetto alla specie delle coniche; rimane pure la medesima la disposizione de' punti A, B, M.

Nel primo caso corrispondono *ellissoidi* al segmento AB; *iperboloidi ad una falda* agli altri tre.

Nel secondo caso corrispondono *iperboloidi a due falde* al segmento AB; *iperboloidi ad una falda* agli altri tre.

Nel terzo caso corrispondono rispettivamente *ellissoidi* e *iperboloidi a due falde* ai due segmenti finiti; *iperboloidi ad una falda* agli altri due.

B) Siano reali le due coniche, e ideali i vertici de' due coni.

a) Paraboloide ellittico. Le due coniche sono di specie diversa, e i loro centri collocati dalla stessa banda rispetto al punto M. Corrispondono *iperboloidi ad una falda* al segmento AB; *iperboloidi a due falde* ai due segmenti che contengono M; *ellissoidi* al rimanente.

b) Paraboloide iperbolico. Le due coniche sono iperboli. Il punto M cade fra A e B. In questo caso corrispondono *iperboloidi a due falde* ai segmenti finiti, *ad una falda* agli indefiniti.

C) Siano ideali le due coniche, e reali i vertici de' due coni.

Il *paraboloide* non può essere che *ellittico.* I punti A e B si trovano dalla stessa banda rispetto ad M. Corrispondono *superficie ideali* al segmento AB; *iperboloidi a due falde* al segmento antecedente e conseguente; *ellissoidi* a quello che resta.

D) Se i vertici de' due coni sono ideali, le due coniche non ponno essere entrambe ideali, ma lo può essere una di esse. Sia B il centro della conica ideale. L'altra conica può essere ellisse o iperbole. Nel primo caso il *paraboloide* è *ellittico* e il punto M cade fra A e B. Nell'altro caso il *paraboloide* è *iperbolico* e il punto B cade fra A ed M.

Nel primo caso corrispondono *superficie ideali* al segmento BM; *iperboloidi ad una falda* al segmento MA; *ellissoidi* al segmento indefinito che comincia in A; *iperboloidi a due falde* all'altro.

Nel secondo caso corrispondono *iperboloidi ad una falda* ai segmenti indefiniti; *iperboloidi a due falde* al segmento AB; *superficie ideali* al segmento BM.

18.° Ritorno al problema generale trattato ne' primi quindici numeri, e prendo a considerare quella funzione del parametro i che rappresenta il prodotto degli assi della superficie (5). Quella funzione sarà infinita per $i=\infty$, cioè pel paraboloide; nulla per $i=0$, λ, μ, ν, ossia per le coniche; epperò essa diverrà *massima* per tre valori finiti di i, l'uno compreso fra lo zero e λ, l'altro fra λ e μ, il terzo fra μ e ν. Quindi in ciascuno de' primi quattro casi colà considerati esisteranno tre superficie reali, e due in ciascuno degli altri tre, per le quali sarà massimo il prodotto degli assi.

Se si cerca l'ellissoide di massimo volume fra tutti quelli inscritti in una stessa sviluppabile, il problema non ammette soluzione che nel primo e quarto caso, cioè quando le coniche sono tutte reali, e fra esse una sia iperbole, le altre ellissi, ovvero due iperboli e due ellissi. Nel primo caso il valore di i che corrisponde al massimo ellissoide è compreso fra λ e μ; nel quarto fra μ e ν.

Il prodotto dei quadrati degli assi della superficie (5) è eguale alla quantità Φ moltiplicata per un fattore indipendente da i. Eguagliando a zero la derivata di Φ presa rispetto ad i si ha l'equazione cubica:

$$4i^3-3(\lambda+\mu+\nu)i^2+2(\mu\nu+\nu\lambda+\lambda\mu)i+\lambda\mu\nu=0$$

le radici della quale (tutte reali e positive) sono i valori del parametro i relativi a quelle superficie (5) per le quali è massimo il prodotto degli assi. Il coefficiente del secondo termine essendo:

$$-\frac{3}{4}(\lambda+\mu+\nu)$$

ne segue che il centro di gravità de' centri delle tre superficie per le quali è massimo il prodotto degli assi coincide col centro di gravità de' centri delle quattro coniche.

Quando la sviluppabile circoscritta si decompone in due coni di seconda classe, non rimanendo più che due segmenti finiti nella locale de' centri, saranno pur due sole le superficie per le quali riuscirà massimo il prodotto degli assi. Si avrà un ellissoide massimo solamente quando siano reali i vertici de' due coni, e reali le coniche intersezioni dei medesimi, e almeno una di esse sia ellisse, quando il paraboloide inscritto nel sistema de' due coni è iperbolico, ovvero le coniche siano entrambe ellissi, ove il paraboloide sia ellittico.

19.° Da quanto precede si ponno concludere molte proposizioni relative al sistema di superficie (5). Eccone le principali.

Si abbia un sistema di superficie della seconda classe inscritta nella stessa superficie sviluppabile della quarta classe: fanno parte del sistema quattro coniche le quali o sono tutte reali, o due sono reali e due ideali. Fa parte del medesimo sistema anche un paraboloide, il quale scompare solo quando una delle quattro coniche sia una parabola.

I centri di tutte quelle superficie sono in una stessa retta, che è dai centri delle quattro coniche divisa in cinque segmenti, tre finiti e due indefiniti. Le superficie che hanno i *centri in uno stesso segmento sono tutte della medesima specie, la quale cambia da un segmento all'altro, in modo che si alternano le superficie rigate e le non rigate.*

Tali superficie sono tutte reali se le quattro coniche sono tutte reali; se vi sono due coniche ideali i centri di queste sono sempre consecutivi e comprendono un segmento ai punti del quale non corrispondono che superficie ideali; mentre ne' punti degli altri segmenti corrispondono superficie tutte reali. Una serie di superficie ideali occupa sempre un segmento finito e sta invece di una serie di superficie rigate, ossia è compresa fra due serie di superficie non rigate che sono sempre iperboloidi a due falde.

Supposte le coniche tutte reali, quando il paraboloide è ellittico, quelle sono tre ellissi ed una iperbole, o tre iperboli ed una ellisse; e quando il paraboloide è iperbolico le coniche sono o tutte iperboli, o due ellissi e due iperboli: in entrambi i casi i centri delle coniche della stessa specie sono disposti consecutivamente sulla locale de' centri.

Quando il paraboloide è iperbolico i segmenti indefiniti contengono i centri di superficie che sono tutte iperboloidi ad una falda. Se il paraboloide è ellittico, uno de' segmenti indefiniti contiene i centri di ellissoidi, l'altro d'iperboloidi a due falde.

Se un segmento finito contiene i centri di superficie non rigate, queste sono ellissoidi solo quando i termini del segmento siano i centri di due ellissi.

Fra le infinite superficie del sistema, ve ne sono tre per le quali è massimo il prodotto degli assi; i loro centri appartengono rispettivamente ai tre segmenti finiti. Una delle tre superficie è ideale, quando vi sia una coppia di coniche ideali. Fra le superficie del sistema esiste un ellissoide di volume massimo solo quando le quattro coniche siano tutte reali, e fra esse vi siano tre ellissi se il paraboloide è ellittico, o due ellissi se il paraboloide è iperbolico.

Il centro di gravità de' punti centri delle tre superficie per le quali è massimo il prodotto degli assi coincide col centro di gravità de' centri delle quattro coniche.

20.° Terminerò esponendo due proprietà del sistema di superficie (5).

Cerco le equazioni del diametro della superficie (5) coniugato ad un piano diametrale qualunque, di coordinate t', u', v', w', ove sia identicamente:

$$At' + Bu' + Cv' + Dw' = 0.$$

Il polo di quel piano è:

$$At(t' + w') + Bu(u' + w') + Cv(v' + w') = 0$$

il qual punto insieme al centro della superficie (5) determina il diametro richiesto, il quale è perciò rappresentato dalla equazione precedente e dalla (6). Se da queste equazioni si elimina i si ha la:

$$(\alpha' t + \beta' u + \gamma' v)(\alpha t' t + \beta u' u + \gamma v' v - D w' w)$$
$$-(\alpha' t' t + \beta' u' u + \gamma' v' v)(\alpha t + \beta u + \gamma v + D w) = 0 .$$

I diametri delle superficie di seconda classe inscritte in una stessa sviluppabile, coniugati ad una medesima direzione, sono generatrici di uno stesso paraboloide iperbolico.

Se si cercano i diametri della superficie (5) coniugati ai piani delle quattro coniche, si trovano essere le rette congiungenti il centro della superficie ai vertici del tetraedro polare. Il che era d'altronde facile a prevedersi.

Cerchiamo da ultimo qual superficie inviluppino i piani diametrali delle superficie (5) coniugati ad una retta data di direzione. La data direzione sia individuata mediante l'equazione *):

$$\lambda t + \mu u + \nu v = 0\,.$$

Siano t, u, v, w le coordinate del piano diametrale della (5) coniugato a quella direzione; avremo

$$\frac{A(t+w)}{\lambda} = \frac{B(u+w)}{\mu} = \frac{C(v+w)}{\nu}$$

$$At + Bu + Cv + Dw = 0$$

da cui, posto $\lambda + \mu + \nu = k$ abbiamo le:

$$k\alpha(t+w) - i\Big(\alpha' k(t+w) - \lambda Dw\Big) = 0$$

$$k\beta(u+w) - i\Big(\beta' k(u+w) - \mu Dw\Big) = 0$$

$$k\gamma(v+w) - i\Big(\gamma' k(v+w) - \nu Dw\Big) = 0$$

le quali danno $\frac{t}{w}, \frac{u}{w}, \frac{v}{w}$ in funzione di i. Eliminando i si hanno le equazioni di tre iperboloidi aventi a due a due una generatrice comune; essi individuano, mediante i loro piani tangenti comuni, una superficie sviluppabile della terza classe (che ha per spigolo di regresso una cubica gobba). Dunque:

I piani diametrali delle superficie di seconda classe inscritte in una stessa sviluppabile, coniugati ad una retta di direzione data, inviluppano una superficie sviluppabile della terza classe.

Cremona, 14 dicembre 1858.

*) Qui le λ, μ, ν indicano costanti arbitrarie, epperò diverse da quelle adoperate nelle equazioni (8).