13.

SOLUTION DE LA QUESTION 435. [20]

Nouvelles Annales de Mathématiques, 1.re série, tome XVIII (1859), pp. 199-204.

Sur les longueurs OA, OB, OC données dans l'espace, on prend respectivement les points a, b, c; les rapports Aa : Bb : Cc sont donnés. Trouver: 1.º l'enveloppe du plan abc; 2.º le lieu du centre de gravité du triangle abc.

D'après l'énoncé, les droites OA, OB, OC sont divisées en parties proportionnelles ou *semblablement*, et a, b, c sont des points homologues de ces divisions. Si l'on demande l'enveloppe du plan abc, la question est un cas particulier de la suivante:

Trois divisions homographiques étant données sur trois droites situées d'une manière quelconque dans l'espace, on demande l'enveloppe du plan de trois points homologues.

On trouve ce problème avec son corrélatif parmi les questions proposées (p. 298) dans l'ouvrage capital de M. Steiner: *Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander* *), Berlin, 1832.

La question corrélative est résolue par le théorème suivant de M. Chasles:

Si trois droites données dans l'espace sont les axes de trois faisceaux homographiques de plans, le lieu du point commun à trois plans homologues est une *cubique gauche* **) (courbe à double courbure du troisième ordre et de troisième classe) qui a deux de ses points sur chacune des droites données.

De là on tire, par le principe de dualité:

Si trois droites données dans l'espace sont divisées homographiquement, l'enveloppe du plan de trois points homologues est une surface développable de la troisième

*) On n'a publié que la première partie de cette admirable production; quand l'auteur nous donnera-t-il les autres? C.

**) Locution italienne très-expressive que nous conservons. Tm. [Terquem].

classe (et du quatrième ordre) qui a deux de ses plans tangents passant par chaque droite donnée; ou bien, ce qui est la même chose, le plan de trois points homologues est osculateur d'une cubique gauche qui a deux de ses plans osculateurs passant par chaque droite donnée.

Dans le cas particulier qui constitue la question 435, les divisions homographiques données sont semblables; donc les points à l'infini des droites OA, OB, OC sont homologues; par conséquent le plan *abc* enveloppe une surface développable de la troisième classe (et du quatrième ordre) qui a un plan tangent à l'infini; ou bien le plan *abc* est osculateur d'une cubique gauche qui a un plan osculateur à l'infini. Les plans OBC, OCA, OAB, ABC, sont osculateurs de la même courbe.

On résout la question avec facilité aussi par le calcul. Posons

$$\begin{array}{lll} OA = a & OB = b & OC = c, \\ Oa = p & Ob = q & Oc = r, \end{array}$$

donc

$$\frac{p-a}{\lambda} = \frac{q-b}{\mu} = \frac{r-c}{\nu} = i,$$

i étant variable avec p, q, r; λ, μ, ν constantes. Cela montre que p, q, r sont les coordonnées courantes d'une droite fixe rapportée aux axes OA, OB, OC.

Les coordonnées du centre de gravité du triangle *abc* sont

$$x = \frac{1}{3}(a+\lambda i), \quad y = \frac{1}{3}(b+\mu i), \quad z = \frac{1}{3}(c+\nu i);$$

donc le lieu du centre est la droite

$$\frac{3x-a}{\lambda} = \frac{3y-b}{\mu} = \frac{3z-c}{\nu},$$

qui est parallèle à la droite fixe menée ci-dessus.

Le plan *abc* a pour équation

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1,$$

ou bien

$$\frac{x}{a+\lambda i} + \frac{y}{b+\mu i} + \frac{z}{c+\nu i} = 1.$$

Si dans cette équation on fait disparaître les dénominateurs, elle devient du troisième degré en i; donc le plan *abc* est osculateur d'une cubique gauche. Pour obtenir les équations de cette courbe, je dérive la dernière équation deux fois par rapport au paramètre i:

$$\frac{\lambda x}{(a+\lambda i)^2}+\frac{\mu y}{(b+\mu i)^2}+\frac{\nu z}{(c+\nu i)^2}=0,$$

$$\frac{\lambda^2 x}{(a+\lambda i)^3}+\frac{\mu^2 y}{(b+\mu i)^3}+\frac{\nu^2 z}{(c+\nu i)^3}=0.$$

De ces trois équations, on tire

$$x=-\frac{\mu\nu(a+\lambda i)^3}{(\nu a-\lambda c)(\lambda b-\mu a)},$$

$$y=-\frac{\nu\lambda(b+\mu i)^3}{(\lambda b-\mu a)(\mu c-\nu b)},$$

$$z=-\frac{\lambda\mu(c+\nu i)^3}{(\mu c-\nu b)(\nu a-\lambda c)},$$

équations de la cubique gauche, qui est évidemment osculée par les plans

$$x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Le plan à l'infini est aussi osculateur de la courbe, parce que les valeurs trouvées de x, y, z ne contiennent pas le paramètre variable i en diviseur.

Les équations ci-dessus sont simples et symétriques; mais si l'on veut étudier la cubique gauche qui résout la question proposée, il est bien plus simple de faire usage de la représentation analytique de ces courbes, que j'ai donnée dans un Mémoire inséré dans les *Annali di Matematica pura e applicata* (Roma, 1858). Soient $x=0$ le plan osculateur dans un point de la courbe qu'on prend pour origine; $y=0$ le plan qui touche la courbe dans ce même point et la coupe à l'infini; $z=0$ le plan qui coupe la courbe à l'origine et la touche à l'infini. Les équations de la courbe seront

$$x=ai^3,\quad y=bi^2,\quad z=ci,$$

a, b, c étant des constantes et i le paramètre variable. La droite $x=z=0$ divise en deux parties égales les cordes de la courbe parallèles au plan $y=0$. La courbe a un grand nombre de propriétés qu'il est bien facile de découvrir à l'aide des équations données ci-devant.

La circonstance que la cubique gauche dont nous nous occupons est osculée par le plan à l'infini constitue pour elle un caractère spécifique qui la distingue de toute autre espèce de courbe du même degré. Si l'on compare les cubiques gauches aux coniques planes, l'espèce particulière de cubique dont il s'agit correspond à la parabole, qui, comme on sait, est touchée par la droite à l'infini. Dans un petit Mémoire qui va être publié dans les *Annali di Matematica* j'ai classifié les cubiques gauches comme il suit *):

Premier genre. La courbe a trois asymptotes réelles; il n'y a pas de plans osculateurs parallèles; les plans osculateurs coupent la surface développable qu'ils enveloppent suivant des coniques qui sont toutes des hyperboles; les centres de ces hyperboles sont sur une ellipse. Le plan de cette ellipse rencontre la cubique en trois points réels et coupe les cônes du second degré qui passent par la cubique suivant des hyperboles.

Seconde genre. La cubique a une seule asymptote réelle et deux plans osculateurs parallèles entre eux qui coupent la surface développable (dont la courbe est l'arête de rebroussement) suivant deux paraboles; tous les autres plans osculateurs coupent la même surface suivant des ellipses ou des hyperboles. Les centres de ces coniques sont sur une hyperbole dont le plan est parallèle et équidistant aux deux plans osculateurs parallèles. Une branche de l'hyperbole focale contient les centres des ellipses; l'autre branche contient les centres des hyperboles. Les points de la cubique gauche auxquels correspondent des ellipses sont situés entre les plans osculateurs paralléles; les points auxquels correspondent des hyperboles sont au dehors. Le plan de l'hyperbole focale rencontre la cubique gauche dans un seul point réel et coupe les cônes du second degré qui passent par la courbe suivant des ellipses.

Tels sont les seuls cas absolument généraux que peuvent présenter les cubiques gauches. Mais il y a à considérer aussi deux cas particuliers, savoir:

1.° La courbe a une seule asymptote réelle à distance finie; les deux autres sont aussi réelles, mais elles coïncident à l'infini. C'est-à-dire: le plan à l'infini coupe la courbe dans un point et est tangent dans un autre. Les plans osculateurs coupent la développable suivant des hyperboles, à l'exception d'une seule qui est une parabole. Les centres de ces hyperboles sont sur une autre parabole. Les deux paraboles sont dans un même plan qui coupe les cônes du second degré passant par la courbe suivant des paraboles.

2.° La courbe a toutes ses asymptotes qui coïncident à l'infini, savoir, elle est osculée par le plan à l'infini. Les plans osculateurs coupent la développable suivant des paraboles.

*) C'est une exposition analytique très-bien faite des belles études de M. Chasles sur les cubiques gauches. J'en ai fait la traduction, que je publierai le plus tôt possible. Tm.