

TEOREMI SULLE LINEE DEL TERZ' ORDINE
A DOPPIA CURVATURA.

Annali di Matematica pura ed applicata, serie I, tomo II (1858), pp. 19-29.

1.° Siano $A=0$, $D=0$ le equazioni di due piani osculatori di una cubica gobba (linea del terz'ordine a doppia curvatura); a e d i punti di contatto; sia $B=0$ l'equazione del piano che tocca la curva in a e la sega in d ; $C=0$ l'equazione del piano che tocca la curva in d e la sega in a . In un recente lavoro sullo stesso argomento, io ho dimostrato che la cubica gobba può essere rappresentata colle equazioni:

$$A = Bi = Ci^2 = Di^3$$

ove i è un parametro variabile che serve a individuare un punto sulla curva. Ivi è pure dimostrato il seguente teorema dovuto al sig. CHASLES:

Se per un punto dato nello spazio si conducono alla cubica i tre piani osculatori, il piano de' punti di contatto passa pel punto dato.

Se le coordinate del punto dato sono $a:b:c:d$, l'equazione del piano è

$$dA - aD + 3(bC - cB) = 0.$$

Facilissimamente si dimostra anche il teorema correlativo:

Se un piano:

$$pA + qB + rC + sD = 0$$

sega la cubica in tre punti, i piani osculatori in questi punti concorrono nel punto:

$$A : B : C : D = -3s : r : -q : 3p$$

che appartiene al piano dato.

Inoltre:

Se da ciascun punto di una retta:

$$lA + mB + nC = 0, \quad pB + qC + rD = 0$$

si conducono tre piani osculatori alla curva, il piano de' punti di contatto passa costantemente per un'altra retta, le cui equazioni sono:

$$(mq - np)A + 3r(mB + nC) = 0, \quad (mq - np)D + 3l(pB + qC) = 0;$$

reciprocamente, se per ciascun punto di questa retta si conducono tre piani osculatori alla cubica, il piano de' punti di contatto passa costantemente per la prima retta.

In generale:

Se da ciascun punto di una superficie geometrica dell'ordine n si conducono tre piani osculatori ad una cubica gobba, il piano de' punti di contatto involuppa una superficie geometrica della classe n , e tale che se da ciascun punto di essa si conducono tre piani osculatori alla cubica, il piano de' punti di contatto involuppa la prima superficie.

2.° Segue da ciò, che a ciascun punto dello spazio corrisponde un piano, e reciprocamente, in questo senso che il piano contiene i punti di contatto della cubica co' suoi piani osculatori passanti pel punto. I punti dello spazio formano così una figura correlativa a quella formata dai piani ad essi corrispondenti. Anzi, siccome ciascun punto giace nel piano che gli corrisponde, così l'attuale sistema di figure correlative coincide con quello che il sig. CHASLES ha dedotto dalla considerazione di un sistema di forze, o di un corpo in movimento (vedi l'*Aperçu historique*).

Per brevità, il punto corrispondente ad un dato piano si dirà *fuoco* del piano; e si diranno *reciproche* due rette tali che i fuochi dei piani passanti per l'una sono nell'altra. Siano x, y, z le ordinarie coordinate rettilinee di un punto, e suppongasi:

$$A = a_1x + a_2y + a_3z$$

$$B = b_1x + b_2y + b_3z$$

$$C = c_1x + c_2y + c_3z$$

$$D = d_1x + d_2y + d_3z + 1$$

ed inoltre si faccia:

$$a_1 = M_x, \quad a_2 = M_y, \quad a_3 = M_z$$

$$d_2a_3 - d_3a_2 + 3(b_2c_3 - b_3c_2) = X$$

$$d_3a_1 - d_1a_3 + 3(b_3c_1 - b_1c_3) = Y$$

$$d_1a_2 - d_2a_1 + 3(b_1c_2 - b_2c_1) = Z.$$

Allora l'equazione del piano il cui fuoco ha le coordinate x_0, y_0, z_0 si può scrivere

così:

$$(x_0 - x) M_x + (y_0 - y) M_y + (z_0 - z) M_z \\ + X(yz_0 - zy_0) + Y(zx_0 - xz_0) + Z(xy_0 - yx_0) = 0;$$

ed inversamente, le coordinate del fuoco del piano:

$$px + qy + rz + s = 0$$

sono:

$$\frac{qM_z - rM_y - sX}{pX + qY + rZ}, \quad \frac{rM_x - pM_z - sY}{pX + qY + rZ}, \quad \frac{pM_y - qM_x - sZ}{pX + qY + rZ}.$$

Am messo che le X, Y, Z, M_x, M_y, M_z rappresentino le somme delle forze componenti e le somme dei momenti delle coppie componenti relative agli assi coordinati e dovute ad un sistema di forze di forma invariabile, il piano corrispondente ad un dato punto sarà quello della *coppia risultante relativa a quel punto*, e viceversa il fuoco di un dato piano sarà il punto a cui corrisponde la coppia risultante situata in quel piano. È poi noto che alle proprietà de' sistemi di forze corrispondono analoghe proprietà del movimento di un corpo. Dunque tutte le *proprietà geometriche* de' sistemi di forze o del moto di un corpo rigido si tradurranno in teoremi relativi alle cubiche gobbe.

3.° Passo ad altre proprietà, nel dimostrar le quali farò sempre uso delle coordinate di PLÜCKER (*Punkt-Coordinationen*).

Considero il piano:

$$(1) \quad A - \sigma B + \sigma_1 C - \sigma_2 D = 0$$

ove:

$$\sigma = \lambda + \mu + \nu, \quad \sigma_1 = \mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu, \quad \sigma_2 = \lambda\mu\nu;$$

il fuoco di questo piano è:

$$A : B : C : D = 3\sigma_2 : \sigma_1 : \sigma : 3.$$

Pongo:

$$A - (\mu + \nu)B + \mu\nu C = \lambda(\mu - \nu)^2 \alpha \\ A - (\nu + \lambda)B + \nu\lambda C = \mu(\nu - \lambda)^2 \beta \\ A - (\lambda + \mu)B + \lambda\mu C = \nu(\lambda - \mu)^2 \gamma. \quad [18]$$

Prese insieme all'equazione (1) le equazioni:

$$\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad \gamma = 0$$

rappresentano i lati del triangolo inscritto nella cubica e posto nel piano (1); e le

$$\beta - \gamma = 0, \quad \gamma - \alpha = 0, \quad \alpha - \beta = 0$$

rappresentano le rette congiungenti i vertici del triangolo al fuoco del piano. Allora le coniugate armoniche di ciascuna di queste tre ultime rette rispetto alle altre due saranno:

$$\beta + \gamma = 0, \quad \gamma + \alpha = 0, \quad \alpha + \beta = 0$$

le quali incontrano, com'è noto, i lati corrispondenti del triangolo in tre punti posti nella retta:

$$\alpha + \beta + \gamma = 0.$$

Questa retta, che rispetto al piano (1) ha tale proprietà esclusiva, si denominerà *direttrice* del piano stesso.

4.° Nella memoria citata ho dimostrato un teorema, di cui qui ricorderò l'enunciato. Premetto che per *polo di un piano rispetto ad una linea di second'ordine* intenderò il polo della retta comune a quel piano ed al piano della linea. Ciò posto, l'enunciato di cui si tratta è il seguente:

Il luogo dei poli di un dato piano rispetto a tutte le coniche, secondo le quali i piani osculatori di una cubica gobba segano la superficie sviluppabile di cui questa è lo spigolo di regresso, è una conica situata in un piano individuato. Reciprocamente, il luogo dei poli di questo piano rispetto a tutte quelle coniche è un'altra conica posta nel primo piano dato.

Due piani dotati di questa scambievole proprietà si sono denominati *congiunti*; *congiunte* ponno dirsi anco le coniche in essi situate; *congiunti* i triangoli inscritti nella cubica e posti in tali piani, e da ultimo *congiunti* i triedri formati dai piani osculatori che concorrono ne' fuochi de' due medesimi piani.

5.° L'equazione del piano congiunto al piano (1) è:

$$(2) \quad A - sB + s_1C - s_2D = 0$$

ove:

$$s = l + m + n, \quad s_1 = mn + nl + lm, \quad s_2 = lmn$$

essendo:

$$l = \frac{\lambda(\mu + \nu) - 2\mu\nu}{2\lambda - (\mu + \nu)}, \quad m = \frac{\mu(\nu + \lambda) - 2\nu\lambda}{2\mu - (\nu + \lambda)}, \quad n = \frac{\nu(\lambda + \mu) - 2\lambda\mu}{2\nu - (\lambda + \mu)}$$

epperò:

$$s = \frac{3(\sigma^2\sigma_1 + 9\sigma\sigma_2 - 6\sigma_1^2)}{27\sigma_2 + 2\sigma^3 - 9\sigma\sigma_1}$$

$$s_1 = \frac{3(-\sigma\sigma_1^2 + 6\sigma^2\sigma_2 - 9\sigma_1\sigma_2)}{27\sigma_2 + 2\sigma^3 - 9\sigma\sigma_1}$$

$$s_2 = \frac{9\sigma\sigma_1\sigma_2 - 27\sigma_2^2 - 2\sigma_1^3}{27\sigma_2 + 2\sigma^3 - 9\sigma\sigma_1}.$$

Le equazioni della retta che unisce i fuochi de' due piani (1) e (2) sono:

$$(3) \quad Ap - Bq + Cr = 0, \quad Bp - Cq + Dr = 0$$

ove:

$$p = \sigma^2 - 3\sigma_1, \quad q = \sigma\sigma_1 - 9\sigma_2, \quad r = \sigma_1^2 - 3\sigma\sigma_2.$$

L'eguaglianza de' coefficienti nelle due equazioni (3) mostra che la retta da esse rappresentata si appoggia alla cubica in due punti (reali o ideali), i cui parametri i_1, i_2 sono dati dalle:

$$i_1 + i_2 = \frac{q}{p}, \quad i_1 i_2 = \frac{r}{p},$$

dunque:

Ogni retta congiungente i fuochi di due piani congiunti è una corda della cubica gobba.

Le equazioni della retta comune ai due piani (1) e (2) sono:

$$(4) \quad (q^2 - pr)A - 3r(Bq - Cr) = 0, \quad (q^2 - pr)D + 3p(Bp - Cq) = 0$$

la forma delle quali mostra che questa retta è l'intersezione dei piani osculatori della cubica ai punti:

$$i_1 + i_2 = \frac{q}{p}, \quad i_1 i_2 = \frac{r}{p}$$

dunque:

La retta intersezione di due piani congiunti è anco l'intersezione dei piani osculatori della cubica gobba ai punti ove si appoggia la retta che unisce i fuochi de' due piani congiunti.

Formando le equazioni delle *direttrici* dei piani congiunti (1) e (2) si trovano per entrambe le equazioni (4), dunque:

Due piani congiunti hanno la stessa direttrice, la quale è la retta ad essi comune.

Confrontando le equazioni (3) e (4) si riconosce che esse rappresentano rette *reciproche*; ossia:

La retta che unisce i fuochi di due piani congiunti, e la loro comune direttrice sono rette reciproche; cioè se per ciascun punto dell'una di esse si conducono tre piani osculatori alla cubica, il piano de' punti di contatto passa costantemente per l'altra.

6.° Cerchiamo se una retta che sia corda della cubica contenga i fuochi di una sola coppia di piani congiunti. Il piano:

$$B - \omega C = 0$$

è congiunto al piano:

$$2A - 3\omega B - 3\omega^2 C + 2\omega^3 D = 0$$

e la retta congiungente i loro fuochi è rappresentata dalle:

$$(5) \quad A - \omega B + \omega^2 C = 0, \quad B - \omega C + \omega^2 D = 0.$$

Affinchè questa retta passi anche pe' fuochi di due altri piani congiunti, le cui equazioni siano (1) e (2), il sistema delle equazioni (5) dovrà essere equivalente al sistema delle (3); epperò si dovrà avere:

$$q = p\omega, \quad r = p\omega^2$$

il che dà:

$$p = \sigma^2 - 3\omega\sigma + 9\omega^2, \quad \sigma_1 = \omega(\sigma - 3\omega), \quad \sigma_2 = -\omega^3$$

$$s = \frac{3\omega(\sigma - 6\omega)}{2\sigma - 3\omega}, \quad s_1 = \omega(s - 3\omega), \quad s_2 = \sigma_2$$

per cui le equazioni (1) e (2) divengono:

$$(6) \quad \begin{aligned} A - 3\omega^2 C + \omega^3 D - \sigma(B - \omega C) &= 0, \\ A - 3\omega^2 C + \omega^3 D - s(B - \omega C) &= 0 \end{aligned}$$

rimanendo σ indeterminata. Queste equazioni rappresentano infinite coppie di piani tutti passanti per la retta rappresentata dalle:

$$A - 3\omega^2 C + \omega^3 D = 0, \quad B - \omega C = 0$$

ossia:

$$2A - 3\omega B - 3\omega^2 C + 2\omega^3 D = 0, \quad B - \omega C = 0.$$

Ne concludiamo che:

Qualunque retta che sia corda della cubica gobba contiene i fuochi di infinite coppie di piani congiunti tutti passanti per una stessa retta, la quale è l'intersezione dei piani osculatori della cubica ne' punti comuni a questa ed alla prima retta.

Da questo teorema consegue quest'altro:

Per qualunque retta che sia l'intersezione di due piani osculatori della cubica gobba passano infinite coppie di piani congiunti, tutti aventi i fuochi su di una stessa retta, la quale si appoggia alla cubica ne' punti di contatto de' due piani osculatori passanti per la prima retta.

7.° La relazione fra s e σ , che si può scrivere così:

$$2s\sigma - 3\omega(s + \sigma) + 18\omega^2 = 0,$$

mostra che i piani rappresentati dalle equazioni (6) formano una involuzione. Dunque:

Le infinite coppie di piani congiunti passanti per una stessa retta, che sia comune intersezione di due piani osculatori della cubica gobba, sono in involuzione. I piani auto-

coniugati della involuzione sono i due piani osculatori. I fuochi di tutti que' piani congiunti formano pure una involuzione, i cui elementi auto-coniugati sono i punti di contatto de' due piani osculatori.

Per avere il *punto centrale* dell' involuzione de' fuochi si condurrà per la *direttrice* il piano parallelo alla *focale* (retta contenente i fuochi). Questo piano ha il suo fuoco a distanza infinita, quindi il piano che gli è congiunto, ossia coniugato nella involuzione, avrà per fuoco il punto centrale richiesto, e sarà il *piano centrale* della involuzione di piani.

La cubica gobba ammette due piani osculatori paralleli fra loro, cioè segantisi secondo la retta *direttrice* posta nel piano all' infinito. Essi ponno quindi risguardarsi come gli elementi auto-coniugati di una involuzione di piani congiunti paralleli. Il piano centrale di questa involuzione avrà per congiunto quello all' infinito, e quindi sarà quello contenente i centri delle coniche secondo cui i piani osculatori della cubica segano la superficie luogo delle sue tangenti.

8.° Per un punto dato nello spazio, di coordinate $a : b : c : d$, passa una retta appoggiantesi alla cubica in due punti; le sue equazioni sono:

$$(c^2 - bd)A - (bc - ad)B + (b^2 - ac)C = 0,$$

$$(c^2 - bd)B - (bc - ad)C + (b^2 - ac)D = 0$$

e pe' punti comuni alla retta ed alla cubica si ha:

$$i_1 + i_2 = \frac{bc - ad}{c^2 - bd}, \quad i_1 i_2 = \frac{b^2 - ac}{c^2 - bd}.$$

La retta è sempre reale, benchè i due punti possano essere ideali.

In un piano dato qualsivoglia:

$$lA + mB + nC + hD = 0$$

esiste una sola retta, comune intersezione di due piani osculatori. Le sue equazioni sono:

$$(q^2 - pr)A - 3r(Bq - Cr) = 0, \quad (q^2 - pr)D + 3p(Bp - Cq) = 0$$

avendosi pe' punti di contatto:

$$i_1 + i_2 = \frac{q}{p} = \frac{mn - 9hl}{3ln - m^2}, \quad i_1 i_2 = \frac{r}{p} = \frac{3hm - n^2}{3ln - m^2}.$$

La retta è sempre reale, benchè i due piani osculatori possano essere ideali. Ossia:

Per un punto dato nello spazio passa sempre una retta (ed una sola) che è focale di un fascio di piani congiunti. In un piano dato esiste sempre una retta (ed una sola) che è direttrice di un fascio di piani congiunti. Se il punto dato è il fuoco del piano dato, le due rette sono reciproche, e i due fasci di piani congiunti coincidono in un solo fascio.

Per ogni punto dello spazio passano tre piani osculatori della cubica, epperò tre rette, ciascuna delle quali è direttrice di un fascio di piani congiunti. Se i tre piani osculatori sono reali, anche le tre direttrici sono reali; ma se due de' piani osculatori sono ideali, si ha una sola direttrice reale, ed è quella comune ai due piani ideali.

Un piano qualunque sega la cubica in tre punti, epperò contiene tre rette, ciascuna delle quali è focale di un fascio di piani congiunti. Se i tre punti d'intersezione sono reali, tali sono anche le tre rette che li uniscono a due a due; ma se due di quelli sono ideali, si ha una sola focale reale, ed è la retta che passa pe' due punti ideali. Ossia:

Per un punto qualunque dello spazio passano o tre rette direttrici reali o una sola, secondo che per quel punto si ponno condurre alla cubica tre piani osculatori reali o un solo. In un piano qualunque esistono tre rette focali reali o una sola, secondo che quel piano sega la cubica in tre punti reali o in un solo.

Credo interessante la proprietà che segue:

Se una retta focale incontra la cubica in due punti reali, e per conseguenza la relativa direttrice esiste in due piani osculatori reali, ciascun piano passante per questa incontra la cubica in un solo punto reale. All'incontro, se la focale incontra la cubica in due punti ideali, ogni piano passante per la direttrice incontra la cubica in tre punti reali. Ossia: ciascun piano di un fascio di piani congiunti in involuzione incontra la cubica in tre punti reali o in uno solo, secondo che gli elementi auto-coniugati della involuzione sono ideali o reali.

Infatti, affinchè la retta (3) incontri la cubica in due punti reali è necessario e sufficiente che sia:

$$q^2 - 4pr > 0$$

ossia, ponendo per p, q, r i loro valori in funzione di σ, σ_1 e σ_2 :

$$27\sigma_2^2 - 18\sigma\sigma_1\sigma_2 - \sigma^2\sigma_1^2 + 4\sigma_1^3 + 4\sigma^3\sigma_2 > 0$$

la quale è appunto la condizione necessaria e sufficiente perchè l'equazione:

$$i^3 - \sigma i^2 + \sigma_1 i - \sigma_2 = 0$$

che dà i parametri de' punti comuni alla cubica ed al piano (1), abbia due radici immaginarie; *c. d. d.*

9.° Se prendiamo in considerazione due piani *congiunti*, essi danno luogo a figure abbastanza interessanti. Per conseguire formole più semplici e simmetriche faccio la seguente trasformazione di coordinate:

$$\begin{aligned}x &= A, & y &= -\omega^3 D, & z &= \omega^3 D - 3\omega^2 C + 3\omega B - A, \\w &= 2A - 3\omega B - 3\omega^2 C + 2\omega^3 D.\end{aligned}$$

Le equazioni:

$$w = 0, \quad x + y + z = 0$$

rappresentano due piani *congiunti*; le:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

rappresentano i piani osculatori concorrenti nel fuoco del piano $x + y + z = 0$, e le:

$$3(y - z) - w = 0, \quad 3(z - x) - w = 0, \quad 3(x - y) - w = 0$$

sono quelle de' piani osculatori concorrenti nel fuoco del piano $w = 0$. Ne' due piani congiunti esistono le due coniche che ho denominate *congiunte*. Quella che è nel piano $w = 0$ è rappresentata dalle equazioni:

$$(7) \quad w = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2yx - 2xz - 2xy = 0$$

epperò questa conica è inscritta nel triangolo formato dalle rette secondo cui il piano $w = 0$ è segato dai piani osculatori concorrenti nel fuoco del piano ad esso congiunto.

Considerando la figura che è nel piano $w = 0$, le rette che uniscono i vertici del triangolo ora nominato ai punti di contatto della conica inscritta sono:

$$(8) \quad w = 0 \quad (y - z = 0, \quad z - x = 0, \quad x - y = 0)$$

le quali sono le intersezioni del piano $w = 0$ coi piani osculatori che concorrono nel suo fuoco. Il punto comune a queste tre rette, ossia il fuoco del piano $w = 0$, è rappresentato dalle equazioni:

$$w = 0, \quad x = y = z.$$

I punti in cui il piano $w = 0$ sega la cubica sono:

$$w = 0 \quad (x : y : z = -8 : 1 : 1; \quad x : y : z = 1 : -8 : 1; \quad x : y : z = 1 : 1 : -8)$$

epperò i lati del triangolo da essi formato hanno per equazioni le:

$$w = 0 \quad (7x + y + z = 0, \quad x + 7y + z = 0, \quad x + y + 7z = 0).$$

Questo triangolo e il triangolo circoscritto alla conica (7) sono *omologici*; le rette che congiungono i loro vertici corrispondenti sono le (8), che concorrono nel fuoco del piano

$w=0$; e i lati omologhi si segano in tre punti posti nella retta:

$$w=0, \quad x+y+z=0$$

la quale è la *direttrice* comune dei due piani congiunti. Si noti inoltre che il fuoco è il polo della direttrice rispetto alla conica (7). Riunendo insieme queste proprietà, possiamo enunciare il seguente teorema:

Dati due piani congiunti P, P', in ciascuno di essi, per es. in P, esistono due triangoli, l'uno ABC inscritto nella cubica, l'altro abc avente i lati ne' piani osculatori concorrenti nel fuoco F' dell'altro piano P'. I due triangoli ABC, abc sono omologici; il loro centro d'omologia è il fuoco F del piano P, e l'asse d'omologia è la direttrice o comune intersezione de' piani P, P'. La direttrice è la polare dei fuochi F, F' rispetto alle coniche congiunte situate ne' piani dati, e queste sono inscritte nei triangoli abc, a'b'c' determinati dalle due terne di piani osculatori. Le rette che in ciascuno de' piani dati, per es. in P, uniscono i punti di contatto della rispettiva conica ai vertici opposti del triangolo circoscritto abc sono situate nei piani osculatori che concorrono nel fuoco F dello stesso piano P.

10.° Le facce corrispondenti dei due *triedri congiunti*, formati dalle due terne di piani osculatori concorrenti ne' fuochi de' due piani congiunti, si segano secondo tre rette, le quali determinano l'iperboloide:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy - \left(\frac{1}{3}w\right)^2 = 0$$

ovvero

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y'z' - 2z'x' - 2x'y' - \left(\frac{1}{3}w'\right)^2 = 0$$

ove:

$$3(y-z) - w = 3x'; \quad 3(z-x) - w = 3y'; \quad 3(x-y) - w = 3z'; \\ 3(x+y+z) = w'.$$

Questo iperboloide passa evidentemente per le due coniche congiunte, dunque:

Le rette secondo le quali si segano le facce corrispondenti di due triedri congiunti e le rispettive coniche congiunte giacciono in uno stesso iperboloide. Le coniche congiunte sono le curve di contatto dell'iperboloide coi coni involventi che hanno i vertici ne' fochi de' piani congiunti.

Qualunque superficie di second'ordine circoscritta al tetraedro:

$$x=0, \quad y=0, \quad z=0, \quad w=0$$

è rappresentabile coll'equazione:

$$fyz + gzx + hxy + lxw + myw + nxw = 0$$

ed analogamente ogni superficie di second'ordine circoscritta al tetraedro:

$$x' = 0, \quad y' = 0, \quad z' = 0, \quad w' = 0$$

ha un'equazione della forma:

$$f'y'z' + g'z'x' + h'x'y' + l'x'w' + m'y'w' + n'z'w' = 0.$$

Affinchè queste due superficie coincidano in una sola devono essere soddisfatte le seguenti condizioni:

$$\frac{f'}{f} = \frac{g'}{g} = \frac{h'}{h} = \frac{l'}{l} = \frac{m'}{m} = \frac{n'}{n}$$

$$3(n-m) - f = 0, \quad 3(l-n) - g = 0, \quad 3(m-l) - h = 0;$$

quindi ogni superficie di second'ordine circoscritta ai due tetraedri simultaneamente sarà compresa nella equazione:

$$(n-m)yx + (l-n)xx + (m-l)xy + \frac{1}{3}w(lx + my + nx) = 0$$

la quale contenendo ancora due arbitrarie $l:m:n$, esprime il teorema:

Ogni superficie di second'ordine passante per sette vertici di due tetraedri formati da due piani congiunti e dai relativi triedri congiunti passa anche per l'ottavo.

11.° Terminerò coll'enunciare alcuni teoremi che si deducono da quelli sopra dimostrati mediante il principio di dualità.

I piani polari di un punto dato rispetto a tutt'i conì di second'ordine che hanno i vertici sulla cubica gobba involuppano un cono di second'ordine che ha il vertice in un punto individuato. Reciprocamente i piani polari di questo secondo punto involuppano un altro cono di second'ordine che ha il vertice nel primo punto.

Due punti dotati di questa scambievole proprietà si diranno *congiunti*, e *congiunti* anco i relativi conì di second'ordine.

Due piani congiunti hanno per fuochi due punti congiunti, e viceversa due punti congiunti sono i fuochi di due piani congiunti.

Sia dato un punto; per esso passano tre piani osculatori della cubica, e un piano A di cui il punto dato è il fuoco. Questo piano sega gli altri tre in tre rette; si cerchi la quarta armonica di ciascuna fra esse rispetto alle altre due; si otterranno così tre nuove rette passanti pel punto dato e poste nel piano A. Queste tre rette determinano cogli spigoli rispettivamente opposti del triedro formato dai piani osculatori tre piani che passano per una stessa retta. Questa retta, che ha rispetto al punto dato tale proprietà esclusiva, si dirà la *focale* del punto.

Due punti congiunti hanno la stessa focale, la quale è la retta che li unisce.

Se per una retta direttrice passano due piani osculatori reali, e per conseguenza la relativa focale si appoggia alla cubica in due punti reali, per ciascun punto di questa passa un solo piano osculatore reale. Se all'incontro la direttrice è l'intersezione di due piani osculatori ideali, da ciascun punto della focale si potranno condurre alla cubica tre piani osculatori reali. Ossia: da ciascun punto di una involuzione di fuochi congiunti si ponno condurre alla cubica tre piani osculatori reali o un solo, secondo che i punti auto-coniugati della involuzione sono ideali o reali.

Dati due punti congiunti F, F' (fuochi di due piani congiunti P, P'), ciascuno di essi, per es. F , è il vertice di due triedri, l'uno $FABC$ formato dai piani osculatori concorrenti in F , l'altro $Fabc$ avente gli spigoli passanti per que' punti della cubica che sono nel piano P' . I due triedri $FABC, Fabc$ sono omologici; il piano d'omologia (il piano ove sono le rette intersezioni delle facce corrispondenti de' due triedri) è il piano P ; l'asse d'omologia (la retta per cui passano i piani determinati dalle coppie di spigoli corrispondenti de' due triedri) è la focale comune FF' . Questa focale è la polare de' due piani congiunti P, P' rispetto ai conì congiunti, e questi sono circoscritti ai triedri $Fabc, F'a'b'c'$ i cui spigoli si appoggiano alla cubica. Le rette che, per ciascun punto congiunto, per es. F , sono le intersezioni delle facce del triedro inscritto $Fabc$ coi piani tangenti al cono circoscritto lungo gli spigoli rispettivamente opposti passano pe' punti della cubica che appartengono al piano P .

Le rette che uniscono i vertici omologhi di due triangoli congiunti (ossia triangoli inscritti nella cubica e posti in piani congiunti) determinano un iperboloido toccato dai relativi conì congiunti lungo due curve poste nei piani congiunti.

Ogni superficie di second'ordine tangente a sette facce di due tetraedri determinati da due triangoli congiunti e dai relativi fuochi tocca anche l'ottava.

Cremona, ottobre 1858.