9.

SULLE LINEE DEL TERZ'ORDINE A DOPPIA CURVATURA.

Annali di Matematica pura ed applicata, serie I, tomo I (1858), pp. 164-174, 278-295.

1. Le belle proprietà, finora note, delle linee del terz'ordine a doppia curvatura (che io chiamerò brevemente *cubiche gobbe)* trovansi tutte, per quanto io sappia, nella nota 33ª. dell'*Aperçu historique* del sig. CHASLES, e in due altri lavori del medesimo geometra, l'uno inserito nei *Comptes rendus* dell'Accademia francese (1843) e l'altro nel giornale del sig. LIOUVILLE (novembre 1857). Tali proprietà vi sono però semplicemente enunciate, ed io non so se alcuno le abbia ancor dimostrate. In questa memoria si propone un metodo analitico per lo studio di linee sì importanti: il qual metodo conduce a brevi dimostrazioni dei principali teoremi contenuti nell'ultima memoria del sig. CHASLES, ed anche di alcuni altri non enunciati finora. Se però questo scritto fosse per destare qualche interesse dal lato geometrico, io me ne professerei interamente debitore allo studio delle memorie dell'illustre geometra francese.

2. Due coni di second'ordine abbiano una generatrice rettilinea comune. Siano $B=0$, $C=0$ le equazioni dei piani tangenti ai due coni lungo questa generatrice. Questi piani segheranno il secondo e il primo cono rispettivamente in altre due generatrici; i piani tangenti lungo le medesime siano $A=0$, $D=0$. Le equazioni dei due coni potranno quindi scriversi così:

$$1) \qquad BD - C^2 = 0\,, \qquad AC - B^2 = 0$$

e la cubica gobba comune ai due coni potrà rappresentarsi colle equazioni:

$$2) \qquad A : B : C : D = \omega^3 : \omega^2 : \omega : 1\,.$$

Un valore particolare di ω si dirà *parametro* del punto da esso individuato sulla linea 2). I vertici dei due coni 1) sono punti della linea ed hanno per rispettivi parametri l'infinito e lo zero.

La retta congiungente due punti (ω, θ) della linea può rappresentarsi colle equazioni:

$$A-(\omega+\theta)B+\omega\theta C=0\,, \qquad B-(\omega+\theta)C+\omega\theta D=0$$

quindi le equazioni della tangente al punto ω sono:

$$A-2\omega B+\omega^2 C=0\,, \qquad B-2\omega C+\omega^2 D=0\,.$$

Se da queste due equazioni si elimina ω si ha la:

3) $$(AD-BC)^2-4(BD-C^2)(AC-B^2)=0$$

dunque la superficie sviluppabile luogo delle tangenti alla cubica gobba è del quart' ordine (39)*). L'equazione del piano passante per tre punti $(\omega, \theta, \varepsilon)$ della cubica gobba è:

$$A-(\omega+\theta+\varepsilon)B+(\theta\varepsilon+\varepsilon\omega+\omega\theta)C-\omega\theta\varepsilon D=0$$

e quella del piano osculatore al punto ω:

$$A-3\omega B+3\omega^2 C-\omega^3 D=0\,.$$

3. Il rapporto anarmonico de' quattro piani:

$$A-(\theta+\omega)B+\omega\theta C-\varepsilon_r\Big(B-(\theta+\omega)C+\omega\theta D\Big)=0 \;\ldots\; (r=1,2,3,4)$$

è $\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1-\varepsilon_3}\cdot\frac{\varepsilon_3-\varepsilon_4}{\varepsilon_2-\varepsilon_4}$, epperò indipendente da ω, θ. Cioè: il rapporto anarmonico de' quattro piani passanti rispettivamente per quattro punti *fissi* della cubica e per una stessa corda *qualunque* di essa linea è una quantità *costante*. Questa quantità può denominarsi *rapporto anarmonico de' quattro punti della cubica gobba* (9, 10).

La retta tangente al punto ω incontra il piano osculatore al punto θ nel punto:

$$A:B:C:D=3\omega^2\theta\,:\,\omega(2\theta+\omega):\,\theta+2\omega:3$$

quindi le equazioni de' quattro piani passanti per una stessa retta $B=C=0$ e rispettivamente pe' quattro punti in cui la tangente della cubica gobba al punto ω incontra i piani osculatori ai punti $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ si otterranno ponendo successivamente $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ in luogo di θ nella:

$$\omega(2B-\omega C)-\theta(2\omega C-B)=0$$

quindi il rapporto anarmonico dei nominati quattro punti della tangente sarà $\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1-\varepsilon_3}\cdot\frac{\varepsilon_3-\varepsilon_4}{\varepsilon_2-\varepsilon_4}$

*) I numeri citati fra parentesi sono quelli dell'ultima memoria del sig. CHASLES.

quantità indipendente da ω. Ossia: il rapporto anarmonico de' quattro punti in cui quattro piani osculatori *fissi* sono incontrati da una tangente *qualunque* è costante (51). Se questa quantità costante si denomina *rapporto anarmonico de' quattro piani osculatori della cubica gobba*, potremo enunciare l'importante teorema: il rapporto anarmonico di quattro piani osculatori d'una cubica gobba è eguale al rapporto anarmonico de' quattro punti di contatto. Quindi i piani osculatori d'una cubica gobba formano una figura *correlativa* a quella formata dai punti di contatto (48).

4. Le equazioni 2) si possono ottenere anche dal teorema che segue. Abbiansi nello spazio due fasci di rette omografici, e sia $B - \omega C = 0$ il piano di due raggi omologhi [9]. I due raggi potranno rappresentarsi colle equazioni:

$$A - \omega B = 0\,, \quad B - \omega C = 0\,; \qquad C - \omega D = 0\,, \quad B - \omega C = 0$$

da cui eliminando ω si hanno le equazioni 2), ossia: il luogo del punto d'intersezione di due raggi omologhi è una cubica gobba passante pe' centri de' fasci. Considerando il piano:

$$A - (\theta + \omega) B + \omega\theta C = 0$$

come appartenente al primo fascio, il piano omologo sarà:

$$B - (\theta + \omega) C + \omega\theta D = 0$$

quindi la retta ad essi comune incontra la cubica gobba in due punti (8).

Dimostro il teorema reciproco. Si consideri un fascio di rette congiungenti il punto ω della linea 2) ad altri punti $x_1, x_2, \ldots$ della medesima. Le equazioni d'un raggio qualunque saranno:

$$A - \omega B - x(B - \omega C) = 0\,, \qquad B - \omega C - x(C - \omega D) = 0\,.$$

Immaginando un secondo fascio di rette congiungenti il punto θ ai punti $x_1, x_2, \ldots$, il raggio di questo fascio corrispondente al punto x sarà:

$$A - \theta B - x(B - \theta C) = 0\,, \qquad B - \theta C - x(C - \theta D) = 0$$

quindi i due fasci sono omografici (5, 6).

5. Ricordata l'equazione del piano osculatore al punto ω, se si cerca di determinare ω onde questo piano passi per un dato punto di coordinate $a : b : c : d$, si ha l'equazione di terzo grado:

$$a - 3\omega b + 3\omega^2 c - \omega^3 d = 0\,.$$

Dunque per un dato punto dello spazio si possono condurre ad una cubica gobba al più tre piani osculatori (40). Chiamando $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ le tre radici, supposte reali, della precedente equazione, il piano passante pe' tre punti di contatto sarà rappresentato dalla:

$$A - (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) B + (\omega_2\omega_3 + \omega_3\omega_1 + \omega_1\omega_2) C - \omega_1\omega_2\omega_3 D = 0$$

ossia, per le note relazioni fra i coefficienti e le radici d'un'equazione:

$$dA - aD + 3(bC - cB) = 0$$

equazione soddisfatta da:

$$A : B : C : D = a : b : c : d ;$$

ossia: quando per un dato punto dello spazio si ponno condurre tre piani osculatori ad una cubica gobba, il piano de' tre punti di contatto passa pel punto dato (41). Di qui emerge una semplice regola per costruire il piano osculatore in un dato punto ω, quando sian dati tre piani osculatori e i loro punti di contatto $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Sia α il punto comune al piano $\omega\,\omega_1\,\omega_2$ ed ai piani osculatori in ω_1, ω_2; β il punto comune al piano $\omega\,\omega_1\,\omega_3$ ed ai piani osculatori in ω_1, ω_3; il piano $\alpha\beta\omega$ sarà il richiesto.

6. Troverò l'equazione della superficie conica che passa per la linea 2) ed ha il vertice in un punto qualunque dello spazio. Questo punto sia quello comune ai tre piani osculatori della cubica:

$$A = 0, \quad D = 0, \quad A - 3\theta B + 3\theta^2 C - \theta^3 D = 0.$$

Le equazioni della retta passante per quel punto ed appoggiata alla linea 2) nel punto variabile ω sono:

$$\omega^2(B - \theta C) - (\omega - \theta) A = 0, \quad \omega(\omega - \theta) D + \theta C - B = 0$$

da cui eliminando ω si ha per la superficie conica richiesta l'equazione:

$$(B - \theta C)^3 - AD(A - 3\theta B + 3\theta^2 C - \theta^3 D) = 0$$

ovvero

$$(x + y + z)^3 - 27\,xyz = 0 \quad \text{o anche} \quad x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} + z^{\frac{1}{3}} = 0$$

ove si è posto:

$$A = x, \quad -\theta^3 D = y, \quad \theta^3 D - 3\theta^2 C + 3\theta B - A = z.$$

Dunque il cono passante per una cubica e avente il vertice in un punto qualunque dello spazio è del terz'ordine e della quarta classe. Supposto che pel vertice del cono passino tre piani osculatori della cubica gobba, cioè che i piani $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

siano tutti e tre reali, il cono ha *tre generatrici reali d'inflessione* ed *una generatrice doppia conjugata*. Le tre generatrici d'inflessione sono nel piano $x+y+z=0$, che è quello passante pe' tre punti di contatto della cubica gobba co' piani osculatori $x=y=z=0$. Questi medesimi piani sono tangenti al cono lungo le generatrici d'inflessione. La generatrice *conjugata* è rappresentata dalle equazioni $x=y=z$.

Se pel vertice del cono passa un solo piano osculatore reale $x=0$, indicando con $u=0$, $v=0$ le equazioni di due piani reali passanti per quel punto, si avrà:

$$y=u+v\sqrt{-1}\,, \quad z=u-v\sqrt{-1}$$

quindi l'equazione del cono potrà scriversi così:

$$x\left((x-u)^2-3v^2\right)-\frac{8}{9}(x-u)^3=0\,;$$

quindi nel caso attuale il cono in quistione ha *una sola generatrice reale d'inflessione* ed *una generatrice doppia nodale*. Il cono è toccato lungo la generatrice d'inflessione dal piano $x=0$ osculatore della cubica, e lungo la generatrice nodale dai due piani $x-u\pm v\sqrt{3}=0$. Se il vertice del cono passante per la cubica gobba è su di una retta tangente a questa linea, quel cono è ancora del terz'ordine, ma della terza classe. Il vertice sia al punto:

$$A=0\,, \quad B=0\,, \quad C-hD=E=0$$

situato sulla tangente $A=B=0$. In questo caso l'equazione del cono può scriversi così:

$$A^2(A-9hB+27h^2E)-(A-3hB)^3=0$$

quindi il cono ha *una generatrice di regresso:*

$$A=0\,, \quad B=0$$

e *una generatrice d'inflessione:*

$$A-9hB+27h^2E=0\,, \quad A-3hB=0\,;$$

lungo queste generatrici il cono è toccato rispettivamente dai piani:

$$A=0\,, \quad A-9hB+27h^2E=0$$

che sono osculatori della cubica gobba.

Da ultimo se il vertice del cono è nel punto θ della cubica gobba, la sua equazione sarà:

$$(A-\theta B)(C-\theta D)-(B-\theta C)^2=0$$

dunque ogni superficie conica passante per una cubica gobba ed avente il vertice in essa è di second' ordine (2).

7. Da quanto precede consegue che la prospettiva di una cubica gobba è una cubica piana della quarta classe, avente un punto doppio, il quale è *conjugato* o un *nodo* secondo chè pel punto di vista si ponno condurre alla cubica gobba tre piani osculatori reali o un solo (18). Se il punto di vista è in una retta tangente della cubica gobba, la prospettiva di questa è una cubica piana avente un punto di regresso, e se il punto di vista è sulla cubica gobba medesima, la prospettiva è una linea di second' ordine.

La reciproca di quest' ultima proprietà si trova enunciata nell'*Aperçu* nel seguente modo: *il luogo de'vertici dei coni di second'ordine passanti per sei punti dati contiene la cubica gobba individuata da questi sei punti* [10]. Questo teorema somministra una semplice regola per costruire per punti una cubica gobba di cui sono dati sei punti a, b, c, d, e, f. I due fasci di rette $a(bcdef)$, $b(acdef)$ si seghino con un piano qualunque passante per la retta cd. Si otterranno così due sistemi di cinque punti, ne' quali tre punti sono comuni. Le due coniche individuate da questi due sistemi, avendo tre punti comuni, si segheranno in un quarto punto, il quale apparterrà alla cubica gobba.

8. Ricerchiamo la natura della linea risultante dal segare con un piano il fascio delle rette tangenti alla cubica gobba, ossia la superficie 3). Il piano segante sia $B - \theta C = 0$ che passa per tre punti della cubica corrispondenti ai parametri *zero*, *infinito* e θ. Posto [11]:

$$C = x, \quad -A + \theta^2 C = \theta^2 y, \quad -\theta D + C = z, \quad B - \theta C = w$$

la sezione riferita alle rette $w = 0$ ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$) sarà rappresentata dalla equazione:

$$4) \qquad z^2y^2 + x^2z^2 + y^2x^2 - 2x^2yz - 2y^2zx - 2z^2xy = 0$$

$\Big\{$ ovvero

$$x^{-\frac{1}{2}} + y^{-\frac{1}{2}} + z^{-\frac{1}{2}} = 0 \Big\}$$

epperò la sezione è una linea del quart' ordine; essa è poi della terza classe perchè ha tre *cuspidi* o *punti di regresso* (44). I cuspidi sono i punti $y = z = 0$; $z = x = 0$; $x = y = 0$ comuni alla cubica gobba ed al piano segante $w = 0$. Le rette tangenti alla linea 4) ne' tre cuspidi sono $y - z = 0$, $z - x = 0$, $x - y = 0$; esse concorrono nel punto $z = y = x$ il quale è quello comune ai tre piani osculatori della linea 2) ne' punti che sono cuspidi della linea 4).

Se la superficie 3) vien segata da un piano tangente alla cubica gobba, per es. dal piano $B = 0$, che passa per la tangente al punto di parametro *zero* e sega la linea al

punto di parametro *infinito*, la sezione risulta composta della retta $A = B = 0$ e della cubica piana:

$$B = 0\,, \quad AD^2 + 4C^3 = 0$$

per la quale il punto $B = C = D = 0$ (cioè il punto della cubica gobba di parametro *infinito)* è un cuspide, e il punto $B = C = A = 0$ (cioè il punto della cubica gobba di parametro *zero)* è un punto d'inflessione. Le tangenti alla cubica piana in questi punti sono $B = D = 0$, $B = A = 0$ rispettivamente. Da ultimo, se la superficie 3) vien segata dal piano $A = 0$ osculatore della cubica gobba nel punto di parametro *zero,* si ottiene la conica:

$$A = 0\,, \quad C^2 + 4(BD - C^2) = 0$$

che è tangente alla retta $A = B = 0$ nel punto della cubica gobba di parametro *zero.*

9. Pe' tre punti della cubica gobba di parametri *zero, infinito* e θ passa il piano $B - \theta C = 0$. Questi punti determinano un triangolo, i lati del quale sono:

$$B - \theta C = 0 \quad \Big(C = 0\,, \quad A - \theta^2 C = 0\,, \quad \theta D - C = 0\Big)\,.$$

Pongo:

$$C = x\,, \quad -A + \theta^2 C = \theta^2 y\,, \quad -\theta D + C = z\,, \quad B - \theta C = w\,;$$

l'equazione d'una conica inscritta nel triangolo suddetto, riferita alle tre rette

$$w = 0 \quad (x = y = z = 0)$$

sarà:

$$(lx)^{\frac{1}{2}} + (my)^{\frac{1}{2}} + (nz)^{\frac{1}{2}} = 0\,.$$

Il piano passante per altri tre punti $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ della cubica gobba sega il piano $w = 0$ nella retta:

$$(\theta - \theta_1)(\theta - \theta_2)(\theta - \theta_3)\,x - \theta^3 y + \theta_1 \theta_2 \theta_3\, z = 0\,;$$

la condizione perchè questa retta tocchi la conica è:

$$\frac{l}{(\theta - \theta_1)(\theta - \theta_2)(\theta - \theta_3)} - \frac{m}{\theta^3} + \frac{n}{\theta_1 \theta_2 \theta_3} = 0\,.$$

Assunto un altro punto θ_4, l'analoga condizione perchè la retta comune intersezione del piano $\theta_1 \theta_2 \theta_4$ e del piano $w = 0$ sia tangente alla stessa conica sarà

$$\frac{l}{(\theta - \theta_1)(\theta - \theta_2)(\theta - \theta_4)} - \frac{m}{\theta^3} + \frac{n}{\theta_1 \theta_2 \theta_4} = 0\,.$$

Da queste due equazioni si ha:

$$l : m : n = (\theta - \theta_1)(\theta - \theta_2)(\theta - \theta_3)(\theta - \theta_4) : \theta^4 : \theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4\,.$$

La simmetria di questi valori mostra che anche le rette nelle quali il piano $w=0$ è segato dai piani $\theta_1\theta_3\theta_4$, $\theta_2\theta_3\theta_4$ sono tangenti alla medesima conica. Ossia: *se un piano sega una cubica gobba in tre punti, le rette congiungenti questi punti, e le rette secondo le quali il piano è segato dalle facce del tetraedro che ha i vertici in altri quattro punti della medesima cubica gobba, sono tangenti ad una stessa conica.* Di questo teorema è conseguenza una elegante regola enunciata dal sig. CHASLES per costruire per punti la cubica gobba, della quale sono dati sei punti (12).

10. La conica ora determinata varia nel piano $w=0$ col variare il tetraedro $\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4$, mantenendosi però sempre inscritta nel triangolo xyz. È evidente che se si tengono fissi i punti $\theta_1\theta_2\theta_3$ e si fa variare θ_4, le coniche corrispondenti a tutt'i tetraedri che hanno tre vertici comuni sono inscritte nello stesso quadrilatero. La quarta tangente comune è la retta comune intersezione del piano $w=0$ e del piano $\theta_1\theta_2\theta_3$. Questa retta corrisponde al triangolo $\theta_1\theta_2\theta_3$. Tenendo fissi i punti $\theta_1\theta_2$ e variando θ_3, le rette corrispondenti agl'infiniti triangoli che hanno due vertici comuni passano per uno stesso punto $(\theta-\theta_1)(\theta-\theta_2)x=\theta^2y=\theta_1\theta_2 z$ il quale è la traccia della retta $\theta_1\theta_2$ sul piano $w=0$. Questo punto corrisponde alla corda $\theta_1\theta_2$ della cubica gobba. Se teniam fisso il punto θ_1 e variamo θ_2, quel punto descriverà la conica:

$$\theta\theta_1 xy-(\theta-\theta_1)\theta_1 xz+(\theta-\theta_1)\theta xy=0$$

ossia

$$lyz+mzx+nxy=0 \qquad \text{ove} \qquad \frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=0$$

la quale risulta segando col piano $w=0$ il cono che ha il vertice al punto θ_1 e passa per la cubica gobba. Variando anche θ_1 le infinite coniche analoghe alla precedente sono inviluppate dalla linea del quart'ordine:

$$z^2y^2+x^2z^2+y^2x^2-2x^2yz-2y^2zx-2z^2xy=0$$

ovvero

$$x^{-\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}}+z^{-\frac{1}{2}}=0$$

la quale è la medesima risultante dal segare la superficie 3) col piano $w=0$. Ossia: *le coniche risultanti dal segare con un piano qualunque i coni di second'ordine passanti per una cubica gobba sono inviluppate dalla linea del quart'ordine che si ha segando col piano medesimo il fascio delle rette tangenti alla cubica gobba.*

11. Si consideri il punto dello spazio pel quale passano i tre piani osculatori della cubica gobba:

$$A=0\,,\quad D=0\,,\quad A-3\theta B+3\theta^2C-\theta^3D=0\,.$$

Posto

$$A = x\,, \quad -\theta^3 D = y\,, \quad \theta^3 D - 3\theta^2 C + 3\theta B - A = z$$

l'equazione d'un cono di second'ordine circoscritto al triedro formato dai tre pian $x = y = z = 0$ sarà

$$\lambda yz + \mu zx + \nu xy = 0.$$

I tre piani osculatori in tre altri punti $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ s'incontrano nel punto:

$$A : 3B : 3C : D = \theta_1\theta_2\theta_3 : \theta_2\theta_3 + \theta_3\theta_1 + \theta_1\theta_2 : \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 : 1$$

e le equazioni della retta congiungente questo punto al vertice del triedro xyz saranno:

$$x : y : z = \theta_1\theta_2\theta_3 : -\theta^3 : (\theta - \theta_1)(\theta - \theta_2)(\theta - \theta_3)$$

quindi la condizione perchè questa retta sia nel cono anzidetto sarà:

$$\frac{\lambda}{\theta_1\theta_2\theta_3} - \frac{\mu}{\theta^3} + \frac{\nu}{(\theta - \theta_1)(\theta - \theta_2)(\theta - \theta_3)} = 0\,.$$

Così la condizione perchè il cono medesimo contenga anche la retta congiungente il punto xyz al punto comune a' tre piani osculatori ne' punti $\theta_1\theta_2\theta_4$ sarà:

$$\frac{\lambda}{\theta_1\theta_2\theta_4} - \frac{\mu}{\theta^3} + \frac{\nu}{(\theta - \theta_1)(\theta - \theta_2)(\theta - \theta_4)} = 0$$

dalle quali si ha:

$$\lambda : \mu : \nu = \theta_1\theta_2\theta_3\theta_4 : \theta^4 : (\theta - \theta_1)(\theta - \theta_2)(\theta - \theta_3)(\theta - \theta_4)$$

quindi lo stesso cono contiene anco le rette congiungenti il punto xyz al punto comune ai piani osculatori ne' punti $\theta_1\theta_3\theta_4$ ed al punto comune ai piani osculatori nei punti $\theta_2\theta_3\theta_4$. Ossia: *gli spigoli del triedro formato da tre piani osculatori di una cubica gobba, e le rette congiungenti il vertice di questo triedro ai vertici del tetraedro formato da altri quattro piani osculatori sono generatrici di uno stesso cono di second'ordine.*

Si dimostra facilmente anche il teorema reciproco e se ne deduce la seguente regola per costruire i piani osculatori d'una cubica gobba, quando ne siano dati sei. Due de' piani dati si segano in una retta, sulla quale si fissi un punto ad arbitrio. Si unisca questo punto ai vertici del tetraedro formato dagli altri quattro piani dati; si costruisca il cono che passa per le quattro congiungenti e per la retta comune ai primi due piani. Questi due piani segheranno il cono in due altre rette, il piano delle quali sarà uno de' piani richiesti.

12. Il cono determinato nel teorema del n.° 11 varia col variare il tetraedro $\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4$. Tenendo fissi i primi tre punti e variando il quarto, ottiensi una serie di coni circoscritti ad uno stesso angolo tetraedro. La quarta generatrice comune è la

retta congiungente il punto xyz al punto comune ai piani osculatori ne' punti $\theta_1\,\theta_2\,\theta_3$. Questa retta, quando varii il punto θ_3 restando fissi $\theta_1\,\theta_2$, genera il piano:

$$\frac{x}{\theta_1\,\theta_2}+\frac{y}{\theta^2}+\frac{z}{(\theta-\theta_1)(\theta-\theta_2)}=0$$

il quale passa per la retta comune intersezione de' piani osculatori a' punti $\theta_1\,\theta_2$. Variando θ_2 il piano anzidetto inviluppa il cono:

$$\Big((\theta-\theta_1)(\theta x-\theta_1 y)-\theta\theta_1 z\Big)^2+4\,\theta\theta_1(\theta-\theta_1)^2\,xy=0$$

$$\left\{\text{ossia}\quad (lx)^{\frac{1}{2}}+(my)^{\frac{1}{2}}+(nz)^{\frac{1}{2}}=0 \qquad \text{ove} \qquad \frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=0\right\}$$

il quale passa per la conica comune intersezione del piano osculatore al punto θ_1 e della superficie 3). Finalmente, variando anche θ_1, i coni analoghi al precedente sono inviluppati dal cono di terzo ordine

$$(x+y+z)^3-27\,xyz=0$$

il quale è quello che ha il vertice al punto xyz e passa per la cubica gobba. Dunque: *tutt' i coni aventi il vertice in uno stesso punto qualunque dello spazio e passanti rispettivamente per le coniche nelle quali i piani osculatori d'una cubica gobba segano il fascio delle tangenti a questa linea, sono inviluppati dal cono di terz'ordine che ha il vertice al medesimo punto dello spazio e passa per la cubica gobba.*

13. Considero i piani osculatori in sei punti della cubica gobba 2), i parametri dei quali siano $\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3$, lo *zero* e *l'infinito*, e il piano osculatore in un settimo punto di parametro ω. Pongo:

$$A=x\,,\quad D=y\,,\quad A-3\theta B+3\theta^2 C-\theta^3 D=z\,,\quad A-3\omega B+3\omega^2 C-\omega^3 D=w\,,$$

quindi:

$$\omega\theta(\omega-\theta)(A-3\,\theta_r B+3\,\theta_r^2 C-\theta_r^3 D)=\omega\theta_r(\omega-\theta_r)\,z$$
$$+(\omega-\theta)\,[\theta_r]\,(x-\omega\theta\theta_r y)+\theta\theta_r(\theta_r-\theta)\,w$$

ove

$$[\theta_r]=(\theta_r-\omega)(\theta_r-\theta).$$

Posto inoltre:

$$\varphi_r=\omega\theta_r(\omega-\theta_r)\,z+(\omega-\theta)\,[\theta_r]\,(x-\omega\theta\theta_r y)$$

le sei rette nelle quali i primi sei piani osculatori tagliano il piano $w=0$, prese in

un certo ordine, saranno:

$$x=0\,,\quad \varphi_3=0\,,\quad y=0\,,\quad \varphi_1=0\,,\quad z=0\,,\quad \varphi_2=0$$

e le diagonali dell'esagono formato da queste rette saranno:

$$\omega\theta_3(\omega-\theta_3)[\theta_2]z+(\omega-\theta)[\theta_2][\theta_3](x-\omega\theta\theta_2 y)=0$$

$$\omega\theta_1\theta_3(\omega-\theta_3)[\theta_1]z+(\omega-\theta)\theta_3[\theta_1][\theta_3](x-\omega\theta\theta_1 y)=0$$

$$\omega\theta_1(\omega-\theta_2)(\omega-\theta_1)z+(\omega-\theta)(\omega-\theta_2)[\theta_1]x-\omega\theta\theta_1(\omega-\theta)(\omega-\theta_1)[\theta_2]y=0\,.$$

La condizione perchè queste rette passino per uno stesso punto è:

$$[\theta_1](\omega-\theta_2)(\omega-\theta_3)(\theta_2-\theta_3)+[\theta_2](\omega-\theta_3)(\omega-\theta_1)(\theta_3-\theta_1)$$
$$+[\theta_3](\omega-\theta_1)(\omega-\theta_2)(\theta_1-\theta_2)=0$$

la quale è identica, qualunque sia ω. Dunque: *un piano osculatore d'una cubica gobba è segato da tutti gli altri piani osculatori della medesima in rette, che sono tangenti di una sola conica.* Nell'*Aperçu* trovasi enunciato questo teorema: *il piano d'una conica tangente a sei piani dati inviluppa una superficie di 4.ª classe inscritta nella superficie sviluppabile del quarto ordine determinata dai sei piani* [12]. Questa proposizione può risguardarsi come la reciproca della precedente. Ne consegue una regola per costruire i piani osculatori d'una cubica gobba, quando ne siano dati sei. Due de' dati piani segheranno ciascuno gli altri cinque in cinque rette: avremo quindi due sistemi di cinque rette, ne' quali una retta è comune. Sulla retta comune intersezione di altri due de' piani dati si fissi un punto ad arbitrio, pel quale si conducano de' piani passanti rispettivamente per le rette di ciascuno de' due sistemi. Avremo così due sistemi di cinque piani, ne' quali tre piani sono comuni. Si costruiscano i coni di secondo ordine inscritti in questi angoli pentaedri; questi coni avranno un quarto piano tangente comune: esso sarà osculatore della cubica gobba.

14. Dati sette punti nello spazio formanti un ettagono gobbo 12345671, cerchiamo la condizione perchè i piani de' tre angoli consecutivi 321, 217, 176 incontrino i lati rispettivamente opposti 65, 54, 43 in tre punti posti in un piano passante pel vertice 1 dell'angolo intermedio. I punti 1, 4, 6, 2 determinano un tetraedro, le equazioni delle facce del quale siano:

$$\mathrm{A}=0\,,\quad \mathrm{B}=0\,,\quad \mathrm{C}=0\,,\quad \mathrm{D}=0$$

alle quali quei punti siano ordinatamente opposti. Siano $a:b:c:d$, $\alpha:\beta:\gamma:\delta$, $t:u:v:w$

le cordinate de' punti 7, 3, 5. Le equazioni de' piani 321, 217, 176 sono:

$$\frac{B}{\beta}=\frac{C}{\gamma}\,;\quad \frac{B}{b}=\frac{C}{c}\,;\quad \frac{B}{b}=\frac{D}{d}$$

e quelle delle rette 65, 54, 43:

$$\frac{A}{t}=\frac{B}{u}=\frac{D}{w}\,;\quad \frac{A}{t}=\frac{C}{v}=\frac{D}{w}\,;\quad \frac{A}{\alpha}=\frac{C}{\gamma}=\frac{D}{\delta}$$

quindi pe' tre punti d'incontro si ha:

$$A:B:C:D=t:u:\frac{\gamma}{\beta}u:w\,;\quad A:B:C:D=t:\frac{b}{c}v:v:w\,;$$
$$A:B:C:D=\alpha:\frac{b}{d}\delta:\gamma:\delta$$

e la condizione richiesta sarà:

$$\frac{dS}{dx_1}=0 \quad \text{ove} \quad S=\begin{vmatrix} \frac{1}{t} & \frac{1}{u} & \frac{1}{v} & \frac{1}{w} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} & \frac{1}{d} \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} & \frac{1}{\gamma} & \frac{1}{\delta} \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix}.$$

Se si risguarda questa condizione come relativa al punto 1, le analoghe condizioni relative ai punti 4, 6, 2 saranno:

$$\frac{dS}{dx_2}=0\,,\quad \frac{dS}{dx_3}=0\,,\quad \frac{dS}{dx_4}=0\,.$$

Si indichino queste equazioni, nelle quali siansi tolti tutt'i divisori, con:

$$T_1=0\,,\quad T_2=0\,,\quad T_3=0\,,\quad T_4=0\,.$$

Le analoghe condizioni relative ai punti 7, 3, 5 saranno:

$$a^2T_1+b^2T_2+c^2T_3+d^2T_4=0\,,\quad \alpha^2T_1+\beta^2T_2+\gamma^2T_3+\delta^2T_3=0\,,$$
$$t^2T_1+u^2T_2+v^2T_3+w^2T_4=0\,.$$

Queste tre equazioni sono dunque conseguenze delle prime quattro. Anzi le prime quattro equivalgono a due sole indipendenti, il che si dimostra facilissimamente, rammentando una nota proprietà de' determinanti.

Ora il punto 5 si consideri come variabile, e gli altri come fissi. Il luogo del punto 5 sarà quindi rappresentato da due qualunque delle equazioni superiori. Le prime quattro equazioni $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$, $T_4 = 0$ rappresentano quattro coni di second' ordine, aventi a due a due una generatrice comune, dunque il luogo del punto 5 è la cubica gobba determinata dai sei punti dati. Cioè: *il luogo di un punto che con sei punti dati formi un ettagono gobbo tale che il piano di uno qualunque de' suoi angoli e i piani de' due angoli adiacenti incontrino i lati rispettivamente opposti in tre punti posti in un piano passante pel vertice del primo angolo, è la cubica gobba determinata dai sei punti dati.* Questo teorema e il suo reciproco sono enunciati nell'*Aperçu.*

Ne deriva una regola per costruire per punti la cubica gobba di cui sono dati sei punti 1, 2, 3, 4, 5, 6. Pe' punti 16 facciasi passare un piano qualunque $16x$ che segherà la cubica gobba in un punto x che si tratta di costruire. I piani $16x$, 123, 456 incontrino le rette 34, 56, 12 rispettivamente ne' punti a, b, c; i piani $ab1$, $ac6$ seghino i lati 45, 23 ne' punti d, e; il punto comune ai piani $d21$, $5e6$, $16x$ sarà il domandato.

15. Qualunque piano tangente alla cubica gobba 2) nel punto di parametro ω è rappresentato da un' equazione della forma:

$$A - 2\omega B + \omega^2 C - \lambda(B - 2\omega C + \omega^2 D) = 0$$

ove λ è un' indeterminata. Questo piano, oltre al toccare la linea nel punto ω, la sega nel punto di parametro λ. Sia data la retta:

$$lA + mB + nC = 0\,, \qquad l'B + m'C + n'D = 0\,;$$

un piano qualunque passante per essa:

$$lA + mB + nC + k(l'B + m'C + n'D) = 0$$

sega la cubica gobba ne' tre punti, i parametri de' quali sono le radici della equazione:

$$l\omega^3 + m\omega^2 + n\omega + k(l'\omega^2 + m'\omega + n') = 0$$

epperò quel piano sarà tangente alla linea, quando quest' ultima equazione abbia due radici eguali. Ora la condizione della eguaglianza di due radici di quell' equazione è un'equazione del quarto grado in k; dunque per una data retta qualsivoglia passano in generale quattro piani tangenti ad una data cubica gobba (38). Questa proprietà si può esprimere anche dicendo che una data retta qualunque incontra al più quattro rette tangenti di una stessa cubica gobba. Se la retta data si appoggia in un punto alla cubica gobba, essa incontrerà al più due rette tangenti, oltre quella che passa per quel punto [13]. Se la data retta fosse una corda della cubica gobba, essa non incon-

trerebbe alcuna tangente oltre le due passanti pe' termini della corda. Ne segue anche che due tangenti della cubica gobba non sono mai in uno stesso piano. — Date quattro rette tangenti alla cubica, vi sono al più due rette che le segano tutte e quattro.

16. Intorno alla retta *fissa:*

$$A - \theta B - h(B - \theta C) = 0\,, \qquad B - \theta C - k(C - \theta D) = 0$$

che incontra la cubica gobba 2) nel solo punto di parametro θ, s'immagini ruotare un piano, l'equazione del quale in una posizione qualsivoglia sarà:

$$A - \theta B - (h + l)(B - \theta C) + kl(C - \theta D) = 0$$

ove l è indeterminata. Questo piano incontra la cubica gobba in due altri punti che hanno per parametri le radici dell'equazione quadratica:

$$\omega^2 - (h + l)\omega + kl = 0$$

e la retta che unisce questi due punti è rappresentata dalle equazioni:

$$A - (h + l)B + klC = 0\,, \qquad B - (h + l)C + klD = 0$$

dalle quali eliminando l si ottiene la:

$$(A - hB)(C - kD) - (B - hC)(B - kC) = 0$$

che rappresenta un iperboloide ad una falda passante per la cubica gobba. Dunque: se intorno ad una retta appoggiata in un solo punto ad una cubica gobba si fa ruotare un piano, questo incontrando la linea in due altri punti, la corda che unisce questi due punti genera un iperboloide passante per la cubica (11).

17. Se si scrive l'equazione generale di una superficie del second'ordine e se ne determinano i coefficienti, almeno in parte, per modo che essa passi per la cubica gobba 2), si trova che l'equazione più generale di una superficie del second'ordine dotata di tale proprietà è:

$$5) \qquad a(B^2 - AC) + b(C^2 - BD) + c(AD - BC) = 0$$

ove i rapporti $a : b : c$ sono due arbitrarie indipendenti. Questa equazione rappresenta evidentemente una superficie rigata, ed in generale dotata di centro, epperò un iperboloide ad una falda (13). Ne segue che, per un iperboloide, il passare per una data cubica gobba equivale a *sette* condizioni, onde se un iperboloide ha sette punti comuni con una cubica gobba, questa giace interamente sulla superficie (15). Le due arbitrarie che entrano nell'equazione generale di un iperboloide, passante per una data cubica gobba, si potranno determinare in modo che la superficie passi per due punti dati

nello spazio, o per una retta che abbia un punto comune colla cubica, o per due rette corde della cubica, o per un punto dello spazio e per una corda della cubica medesima (16, 19, 20, 24).

L'equazione 5) può essere scritta così:

$$(cA - bB)(cD - aC) + (aB - cC)(cB - bC) = 0$$

da cui risulta che le generatrici rettilinee di un sistema si possono rappresentare colle equazioni:

6) $$cA - bB + \lambda(aB - cC) = 0\,, \qquad cB - bC - \lambda(cD - aC) = 0$$

e quelle dell'altro sistema colle equazioni:

7) $$cA - bB + \mu(cB - bC) = 0\,, \qquad aB - cC - \mu(cD - aC) = 0\,,$$

λ e μ indeterminate. Se nelle equazioni 6) si pone:

$$A : B : C : D = \omega^3 : \omega^2 : \omega : 1$$

si hanno le:

$$\omega\left(c\omega^2 - b\omega + \lambda(a\omega - c)\right) = 0\,, \qquad c\omega^2 - b\omega + \lambda(a\omega - c) = 0$$

le quali ammettono in comune due valori reali o imaginari di ω. Dunque ciascuna generatrice del sistema 6) incontra generalmente la cubica gobba in due punti. All'incontro le equazioni 7) per la stessa sostituzione danno le:

$$(c\omega - b)(\omega + \mu) = 0\,, \qquad (a\omega - c)(\omega + \mu) = 0$$

ammettenti in comune un sol valore di ω. Dunque ciascuna generatrice del sistema 7) incontra la cubica gobba in un solo punto. Cioè: quando un iperboloide passa per una cubica gobba, questa incontra in due punti ciascuna generatrice di un sistema, ed in un solo punto ciascuna generatrice dell'altro sistema (14).

La condizione nccessaria e sufficiente perchè la quantità

$$c\omega^2 - b\omega + \lambda(a\omega - c)$$

sia un quadrato perfetto è un'equazione di secondo grado in λ; dunque vi sono in generale due generatrici del sistema 6) le quali sono tangenti alla cubica gobba (23).

18. Siano x, y i due valori di ω dati dall'equazione:

$$c\omega^2 - b\omega + \lambda(a\omega - c) = 0$$

cioè i parametri de' due punti in cui la cubica gobba è incontrata dalla generatrice 6).

Si ha:

$$c(x+y)=b-\lambda a\,, \qquad xy=-\lambda$$

quindi eliminando λ si ha la:

$$c(x+y)-axy=b$$

la quale esprime che i punti in cui la cubica gobba incontra le generatrici del sistema 6) sono in *involuzione*, cioè i piani passanti rispettivamente per essi, e per una stessa corda qualunque della cubica gobba formano un fascio in involuzione (32). Se si determinano i piani *doppi* di questo fascio, essi individueranno sulla cubica due punti, e le generatrici del sistema 6) passanti per essi saranno evidentemente tangenti alla cubica (23).

Reciprocamente: se sopra di una cubica gobba si ha un'involuzione di punti, le corde congiungenti i punti *conjugati* saranno generatrici d'uno stesso iperboloide (21). Infatti siano x, y i parametri di due punti conjugati; avremo, a causa dell'involuzione, un'equazione della forma:

$$\alpha(x+y)+\beta xy+\gamma=0$$

ove α, β, γ sono costanti. Le equazioni della retta congiungente i punti di parametri x, y sono:

$$-\mathrm{B}(x+y)+\mathrm{C}xy+\mathrm{A}=0\,, \qquad -\mathrm{C}(x+y)+\mathrm{D}xy+\mathrm{B}=0$$

dalle quali tre equazioni eliminando $x+y$ ed xy si ha la:

$$\begin{vmatrix} \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{A} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{B} \\ -\alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}=0$$

che è della forma 5), epperò rappresenta un iperboloide passante per la cubica gobba.

Combinando la proprietà espressa in questo paragrafo con quella del paragrafo 16, si ha il seguente enunciato: se per una retta che s'appoggi in un solo punto ad una cubica gobba si fanno passare quanti piani si vogliano, le coppie di punti in cui essi incontrano nuovamente la curva sono in involuzione.

19. Siano:

$$\mathrm{A}=0\,, \quad \mathrm{B}=0\,, \quad \mathrm{C}=0\,, \quad \mathrm{D}=0\,, \quad \mathrm{E}=0\,, \quad \mathrm{F}=0$$

le equazioni di sei piani; saranno:

$$\mathrm{A}-\lambda\mathrm{B}=0\,, \quad \mathrm{C}-\lambda\mathrm{D}=0\,, \quad \mathrm{E}-\lambda\mathrm{F}=0$$

le equazioni di tre piani *omologhi* in tre fasci omografici. Da queste equazioni eliminando λ si hanno le:

$$AD - BC = 0\,, \qquad AF - BE = 0$$

equazioni di due iperboloidi aventi la generatrice comune $A = B = 0$. Dunque il punto comune ai tre piani omologhi ha per luogo geometrico la cubica gobba, comune ai due iperboloidi (27).

Ora i due sistemi di generatrici del primo iperboloide sono rappresentabili colle equazioni:

1.° sistema . . . $A - \mu C = 0\,, \qquad B - \mu D = 0$

2.° sistema . . . $A - \lambda B = 0\,, \qquad C - \lambda D = 0$

e pel secondo iperboloide:

1.° sistema . . . $A - \mu' E = 0\,, \qquad B - \mu' F = 0$

2.° sistema . . . $A - \lambda' B = 0\,, \qquad E - \lambda' F = 0$

e si osservi che la generatrice comune $A = B = 0$ appartiene al primo sistema per entrambi gl' iperboloidi. Se si pone $A : B : C : D = \omega^3 : \omega^2 : \omega : 1$ nelle equazioni delle generatrici del primo iperboloide, ovvero se si pone $A : B : E : F = \theta^3 : \theta^2 : \theta : 1$ nelle equazioni delle generatrici del secondo iperboloide, si trova che la cubica gobba incontra in ciascun iperboloide in due punti le generatrici del primo sistema (cioè di quello cui appartiene la generatrice comune), mentre incontra in un sol punto ciascuna generatrice dell' altro sistema (26).

20. Considerando i due iperboloidi:

$$a(B^2 - AC) + b(C^2 - BD) + c(AD - BC) = 0$$
$$a'(B^2 - AC) + b'(C^2 - BD) + c'(AD - BC) = 0$$

qualsivogliano fra quelli passanti per la cubica gobba 2), osservo che queste equazioni sono entrambe soddisfatte dalle:

$$cA - bB + \lambda(aB - cC) = 0\,, \qquad cB - bC - \lambda(cD - aC) = 0$$

ove sia:

$$\lambda = \frac{bc' - b'c}{ac' - a'c}$$

dunque due iperboloidi passanti per una stessa cubica gobba hanno necessariamente una generatrice comune (25).

21. Si trasformi la funzione quadratica a quattro variabili A, B, C, D:

$$AD - BC$$

sostituendo alle variabili medesime altrettante funzioni lineari di altre variabili A', B', C', D', e si determinino i coefficienti della sostituzione in modo che la funzione trasformata sia:

$$A'D' - B'C'.$$

Applicando le formole che il professor Brioschi dà in una sua Nota sulle *forme quadratiche* (Annali di Tortolini, giugno 1854), si trova la seguente sostituzione:

$$\frac{A}{a} = \lambda'\mu'A' + \mu'B' + \lambda'C' + D'$$

$$\frac{B}{b} = \lambda\mu'A' + \mu'B' + \lambda C' + D'$$

$$\frac{C}{c} = \lambda'\mu A' + \mu B' + \lambda'C' + D'$$

$$\frac{D}{d} = \lambda\mu A' + \mu B' + \lambda C' + D'$$

o reciprocamente:

$$\frac{A'}{d} = A - \lambda B - \mu C + \lambda\mu D$$

$$-\frac{B'}{c} = A - \lambda'B - \mu C + \lambda'\mu D$$

$$-\frac{C'}{b} = A - \lambda B - \mu'C + \lambda\mu'D$$

$$\frac{D'}{a} = A - \lambda'B - \mu'C + \lambda'\mu'D.$$

Le quantità $a, b, c, d, \lambda, \mu, \lambda', \mu'$ sono legate da due sole condizioni.

$$ad = bc = \frac{1}{(\lambda - \lambda')(\mu - \mu')}$$

per cui la sostituzione contiene sei arbitrarie, fra loro indipendenti.

Per un sistema di valori particolari di queste arbitrarie otterremo sull'iperboloide:

$$AD - BC = A'D' - B'C' = 0$$

due cubiche gobbe, l'una rappresentabile colle equazioni:

8) $$A'C' - B'^2 = 0\,, \qquad B'D' - C'^2 = 0$$

e l'altra colle:

9) $$A'B' - C'^2 = 0\,, \qquad C'D' - B'^2 = 0$$

oltre poi quella più volte considerata, che è rappresentata dalle 1) o dalle 2).

22. I due sistemi di generatrici dell'iperboloide $AD - BC = 0$ sono rappresentati dalle equazioni:

1.° sistema . . . $A - \omega B = 0\,, \qquad C - \omega D = 0$

2.° sistema . . . $A - \theta C = 0\,, \qquad B - \theta D = 0\,.$

Ora dalle formole di sostituzione risulta evidente che i piani $A' = 0$, $B' = 0$, $C' = 0$, $D' = 0$ passano rispettivamente per le generatrici del primo sistema:

$$\begin{matrix} A - \lambda B = 0 \\ C - \lambda D = 0 \end{matrix}\;;\quad \begin{matrix} A - \lambda' B = 0 \\ C - \lambda' D = 0 \end{matrix}\;;\quad \begin{matrix} A - \lambda B = 0 \\ C - \lambda D = 0 \end{matrix}\;;\quad \begin{matrix} A - \lambda' B = 0 \\ C - \lambda' D = 0 \end{matrix}$$

e per le generatrici del secondo sistema:

$$\begin{matrix} A - \mu C = 0 \\ B - \mu D = 0 \end{matrix}\;;\quad \begin{matrix} A - \mu C = 0 \\ B - \mu D = 0 \end{matrix}\;;\quad \begin{matrix} A - \mu' C = 0 \\ B - \mu' D = 0 \end{matrix}\;;\quad \begin{matrix} A - \mu' C = 0 \\ B - \mu' D = 0 \end{matrix}$$

dunque i due sistemi di generatrici dell'iperboloide saranno anco rappresentabili colle equazioni:

1.° sistema . . . $A' - xB' = 0\,, \qquad C' - xD' = 0$

2.° sistema . . . $A' - yC' = 0\,, \qquad B' - yD' = 0\,.$

Ne segue che fra le tre cubiche gobbe sopra menzionate la 1) e la 8) incontrano ciascuna generatrice del primo sistema in un solo punto e ciascuna generatrice dell'altro sistema in due punti; mentre la 9) incontra ciascuna generatrice del primo sistema in due punti e ciascuna del secondo in un solo punto. Cerchiamo in quanti punti si seghino le linee 1) ed 8), ed in quanti le 1), 9).

Per trovare i punti comuni alle linee 1), 8), nelle 8) pongasi

$$A : B : C : D = \omega^3 : \omega^2 : \omega : 1\,;$$

avremo le:

$$bd(\omega^2 - \mu)(\omega^2 - \mu')(\omega - \lambda)^2 + c^2(\omega^2 - \mu)^2(\omega - \lambda')^2 = 0$$
$$ac(\omega^2 - \mu)(\omega^2 - \mu')(\omega - \lambda')^2 + b^2(\omega^2 - \mu')^2(\omega - \lambda)^2 = 0$$

ossia, posto $h = \frac{bd}{c^2} = \frac{b^2}{ac}$:

$$(\omega^2 - \mu)\,[h(\omega^2 - \mu')(\omega - \lambda)^2 + (\omega^2 - \mu)(\omega - \lambda')^2] = 0$$
$$(\omega^2 - \mu')\,[h(\omega^2 - \mu')(\omega - \lambda)^2 + (\omega^2 - \mu)(\omega - \lambda')^2] = 0$$

equazioni che ammettono in comune le quattro soluzioni della:

10) $$h(\omega^2 - \mu')(\omega - \lambda)^2 + (\omega^2 - \mu)(\omega - \lambda')^2 = 0$$

dunque: due cubiche gobbe situate su di uno stesso iperboloide e seganti entrambe in due punti una stessa generatrice hanno in generale quattro punti comuni (28).

Ponendo $A : B : C : D = \omega^3 : \omega^2 : \omega : 1$ nelle 9) per trovare in quanti punti si segano le linee 1) e 9), e posto inoltre $k = \frac{cd}{b^2} = \frac{c^2}{ab}$, si hanno le:

$$(\omega - \lambda)\left(k(\omega^2 - \mu)^2(\omega - \lambda') + (\omega^2 - \mu')^2(\omega - \lambda)\right) = 0$$
$$(\omega - \lambda')\left(k(\omega^2 - \mu)^2(\omega - \lambda') + (\omega^2 - \mu')^2(\omega - \lambda)\right) = 0$$

equazioni ammettenti in comune le cinque soluzioni della:

$$k(\omega^2 - \mu)^2(\omega - \lambda') + (\omega^2 - \mu')^2(\omega - \lambda) = 0$$

cioè: se due cubiche gobbe poste su di uno stesso iperboloide incontrano una stessa generatrice, l'una in un punto, l'altra in due punti, esse si segano generalmente in cinque punti (28).

Reciprocamente: due cubiche gobbe aventi cinque punti comuni sono sempre situate su di uno stesso iperboloide. Infatti l'equazione più generale di un iperboloide passante per la prima delle due linee contiene due costanti arbitrarie; si determinino queste in modo che la superficie passi per altri due punti della seconda linea; allora questa avendo sette punti comuni colla superficie dell'iperboloide giacerà per intero su di essa (30).

23. Consideriamo sull'iperboloide:

$$AD - BC = A'D' - B'C' = 0$$

un sistema di cubiche gobbe aventi quattro punti comuni. Queste cubiche saranno rappresentate dalle equazioni 8) nelle quali si variino le λ, μ, λ', ecc. in modo però da serbare inalterata l'equazione 10) che dà i punti comuni alla cubica 1) ed alla 8). Per maggior semplicità supponiamo che due di questi punti comuni alle cubiche siano

quelli corrispondenti ad $\omega = 0$ e ad $\omega = \infty$, per cui nella (10) si dovrà porre:

$$h + 1 = 0\,, \qquad \mu = k\lambda^2\,, \qquad \mu' = k\lambda'^2$$

k indeterminata. La 10) diverrà:

$$2\omega^2 - \omega(1+k)(\lambda+\lambda') + 2k\lambda\lambda' = 0$$

e poichè i coefficienti di questa equazione devono essere invariabili, le λ, λ', k saranno legate dalle relazioni:

$$(1+k)(\lambda+\lambda') = 2\alpha\,, \qquad k\lambda\lambda' = \beta$$

ove α, β sono *costanti determinate.* Quindi nelle equazioni 8) si potranno esprimere tutte le indeterminate in funzione di k che rimarrà solo parametro variabile dall'una all'altra cubica gobba. Ora osserviamo che un punto qualunque dell'iperboloide, considerato come l'intersezione delle generatrici:

$$A - xB = 0\,, \quad C - xD = 0\,; \qquad A - yC = 0\,, \quad B - yD = 0$$

può rappresentarsi colle equazioni:

$$A : B : C : D = yx : y : x : 1\,.$$

Per avere i punti in cui la linea 8) incontra la generatrice:

$$A - yC = 0\,, \qquad B - yD = 0$$

pongansi i valori precedenti nelle 8); si avrà:

$$(y - \mu')(x - \lambda)^2 - (y - \mu)(x - \lambda')^2 = 0$$

ossia:

11) $$\alpha k x^2 - (y + \beta)(1 + k)x + \alpha y = 0\,.$$

Siano x_0 ed x_1 i due valori di x dati da quest'equazione; sarà:

$$x_0 + x_1 = \frac{(y+\beta)(1+k)}{\alpha k}\,, \qquad x_0 x_1 = \frac{y}{k}$$

dunque, indicando con M, N quantità soddisfacenti alle:

$$y + \beta = My = N$$

avremo:

$$\alpha(x_0 + x_1) - Mx_0x_1 - N = 0$$

ossia: le coppie di punti in cui la generatrice $A - yC = 0$, $B - yD = 0$ (che appartiene al secondo sistema) è segata dalle cubiche della famiglia 8), cioè da più

cubiche poste su di uno stesso iperboloide, ed aventi quattro punti comuni, sono in involuzione (34).

24. Per avere il punto in cui la cubica 8) incontra la generatrice del primo sistema:

$$A - xB = 0\,, \qquad C - xD = 0$$

consideriamo y come incognita nella equazione 11):

$$y = \frac{\beta x + kx(\beta - \alpha x)}{\alpha - x(1+k)}\,.$$

Ora cerchiamo il rapporto anarmonico de' quattro punti, in cui la medesima generatrice è segata da quattro linee della famiglia 8), corrispondenti a $k = k_1, k_2, k_3, k_4$. Tale rapporto anarmonico sarà quello de' quattro piani passanti per gli stessi punti rispettivamente, e per una retta qualunque, per esempio $B = C = 0$. Il piano passante per questa retta e per uno qualunque di que' quattro punti è:

$$Bx - yC = 0$$

ossia ponendo per y il suo valore:

$$B(\alpha - x) - \beta C - k\Big(xB + (\beta - \alpha x)\,C\Big) = 0\,.$$

Cambiando la cubica gobba cambia soltanto k, quindi il rapporto anarmonico richiesto sarà:

$$\frac{(k_1 - k_2)(k_3 - k_4)}{(k_1 - k_3)(k_2 - k_4)}$$

quantità indipendente da x. Dunque: il rapporto anarmonico de' quattro punti in cui quattro cubiche poste su di uno stesso iperboloide e aventi quattro punti comuni incontrano una generatrice di quel sistema, che è intersecato in un solo punto per ogni generatrice, è costante, qualunque sia la generatrice (34).

25. Dati nello spazio sei punti, siano:

$$A' = 0\,, \quad B' = 0\,, \quad C' = 0\,, \quad D' = 0$$

le equazioni delle facce del tetraedro determinato da quattro fra que' punti; le funzioni A', B', C', D' s'intendano moltiplicate per tali costanti che il quinto punto sia rappresentato dalle:

$$A' = B' = C' = D'$$

e il sesto punto sia:

$$\frac{A'}{a} = \frac{B'}{b} = \frac{C'}{c} = \frac{D'}{d}\,.$$

Allora la equazione de' due coni di second'ordine passanti entrambi per questi sei punti, ed aventi il vertice l'uno nel punto $A' = B' = C' = 0$, l'altro nel punto $D' = B' = C' = 0$, saranno

$$\frac{a(b-c)}{A'} + \frac{b(c-a)}{B'} + \frac{c(a-b)}{C'} = 0\,; \quad \frac{d(b-c)}{D'} + \frac{b(c-d)}{B'} + \frac{c(d-b)}{C'} = 0\,.$$

Posto:

$$B = c(b-d)B' + b(d-c)C'\,; \qquad C = c(b-a)B' + b(a-c)C'$$

$$a(b-a)(a-c)A = cb(a-d)^2(c-b)A' + ac(b-d)^2(a-c)B' + ba(c-d)^2(b-a)C' \quad [^{14}]$$

$$d(b-d)(d-c)D = cb(d-a)^2(c-b)D' + dc(b-a)^2(d-c)B' + bd(c-a)^2(b-d)C'$$

le equazioni dei due coni divengono:

$$AC - B^2 = 0\,, \qquad BD - C^2 = 0$$

quindi le equazioni della cubica gobba passante pe' sei punti dati sono:

$$A : B : C : D = \omega^3 : \omega^2 : \omega : 1\,.$$

26. Si considerino ora le cubiche gobbe passanti pe' primi cinque punti dati e appoggiantisi ad una retta passante per uno di questi punti. Siano

$$A' : B' : C' = \alpha : \beta : \gamma$$

le equazioni di questa retta; tutte le anzidette cubiche saranno situate sul cono di second'ordine:

$$12) \qquad \frac{\alpha(\beta-\gamma)}{A'} + \frac{\beta(\gamma-\alpha)}{B'} + \frac{\gamma(\alpha-\beta)}{C'} = 0$$

e una qualunque di esse sarà l'intersezione di questo cono e di quest'altro:

$$13) \qquad \frac{(\beta-\gamma)}{D'} + \frac{\beta(\gamma z-1)}{B'} + \frac{\gamma(1-\beta z)}{C'} = 0$$

ove z varia da una cubica all'altra. Ciò premesso, passo a dimostrare il teorema: *quattro cubiche gobbe situate su di uno stesso cono di second'ordine ed aventi cinque punti comuni incontrano una generatrice del cono in quattro punti, il rapporto anarmonico de' quali è costante qualunque sia la generatrice.* Una generatrice qualunque del cono 12) è rappresentata dalle equazioni:

$$14) \qquad B' - hC' = 0\,, \qquad h\alpha(\beta-\gamma)C' + \Big(\beta(\gamma-\alpha) + h\gamma(\alpha-\beta)\Big)A' = 0$$

h indeterminata. Per determinare il punto in cui questa generatrice è incontrata dalla cubica 12), 13) cerchiamo le equazioni della generatrice secondo la quale il piano $B' - hC' = 0$ sega il cono 13); esse sono:

$$15) \qquad B' - hC' = 0\,, \qquad h(\beta - \gamma)C' + \Big(\beta(\gamma z - 1) + h\gamma(1 - \beta z)\Big)D' = 0$$

quindi il punto richiesto è determinato dalle tre equazioni 14) e 15). Dando a z quattro valori particolari z_1, z_2, z_3, z_4 successivamente, otterremo i quattro punti in cui la generatrice 14) è incontrata da quattro cubiche gobbe passanti pei cinque punti dati e appoggiate alla retta data, ciascuna in un altro punto. Il rapporto anarmonico de' quattro punti è eguale a quello de' quattro piani condotti per essi rispettivamente e per una medesima retta qualunque, per esempio la $C' = D' = 0$. Le equazioni de' quattro piani sono:

$$E + z_r D' = 0\,; \qquad (r = 1, 2, 3, 4)$$

ove:

$$\beta\gamma(1 - h)E = h(\beta - \gamma)C' + (h\gamma - \beta)D'$$

epperò il rapporto anarmonico in quistione è

$$\frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}$$

quantità indipendente da h, *c. d. d.*

27. Il piano osculatore della cubica gobba 2) nel punto di parametro ω taglia la superficie sviluppabile 3), di cui la cubica è lo spigolo di regresso, secondo la conica rappresentata dalle equazioni:

$$A - 3\omega B + 3\omega^2 C - \omega^3 D = 0$$

$$(A - \omega B)^2 - 4\omega^2(B^2 - AC) = 0\,, \quad \text{ovvero} \quad (C - \omega D)^2 - 4(C^2 - BD) = 0\,.$$

Lo stesso piano osculatore taglia il piano:

$$B - hC = 0$$

secondo una retta, il cui polo rispetto alla conica anzidetta è rappresentato dalle equazioni:

$$A : B : C : D = 3h\omega^2 : \omega(2\omega - h) : \omega - 2h : -3$$

dalle quali eliminando ω si hanno le:

$$2A - 3hB - 3h^2C + 2h^3D = 0\,, \qquad h(3C - 2hD)^2 + AD = 0$$

rappresentanti un' altra conica. Ossia: un piano osculatore *variabile* di una cubica gobba taglia un piano *fisso* secondo una *retta,* e il fascio delle rette tangenti alla cu-

bica in una *conica; il polo di questa retta rispetto a questa conica ha per luogo geometrico un'altra conica.* Per brevità il piano di quest'ultima conica si dirà *congiunto* al dato piano fisso.

Se il piano fisso si suppone a distanza infinita, il teorema precedente somministra quest'altro: *i centri delle coniche risultanti dal segare coi piani osculatori d'una cubica gobba il fascio delle sue tangenti sono tutti in una stessa conica.*

L'equazione del piano *fisso* ora sia:

$$16) \qquad A - (\lambda + \mu + \nu)B + (\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu)C - \lambda\mu\nu D = 0$$

cerchiamo l'equazione del piano *congiunto.* A tale uopo osservo che alle equazioni 2) si possono sostituire le seguenti:

$$A' : B' : C' : D' = x^3 : x^2 : x : 1$$

ove:

$$A' = A - 3\nu B + 3\nu^2 C - \nu^3 D$$

$$B' = A - (2\nu + \mu)B + \nu(2\mu + \nu)C - \mu\nu^2 D$$

$$C' = A - (2\mu + \nu)B + \mu(2\nu + \mu)C - \nu\mu^2 D$$

$$D' = A - 3\mu B + 3\mu^2 C - \mu^3 D$$

e inoltre:

$$x = \frac{\omega - \nu}{\omega - \mu}.$$

Per questa sostituzione l'equazione del piano fisso 16) diviene:

$$B' - kC' = 0$$

ove:

$$k = \frac{\lambda - \nu}{\lambda - \mu}$$

epperò l'equazione del piano *congiunto* sarà:

$$2A' - 3kB' - 3k^2 C' + 2k^3 D' = 0$$

ossia:

$$17) \qquad A - (\lambda' + \mu' + \nu')B + (\nu'\mu' + \lambda'\nu' + \mu'\lambda')C - \lambda'\mu'\nu' D = 0$$

ove:

$$\lambda' = \frac{\lambda(\mu + \nu) - 2\mu\nu}{2\lambda - (\mu + \nu)}, \quad \mu' = \frac{\mu(\nu + \lambda) - 2\nu\lambda}{2\mu - (\nu + \lambda)}, \quad \nu' = \frac{\nu(\lambda + \mu) - 2\lambda\mu}{2\nu - (\lambda + \mu)}.$$

Da queste ultime equazioni si ricava reciprocamente:

$$\lambda = \frac{\lambda'(\mu' + \nu') - 2\mu'\nu'}{2\lambda' - (\mu' + \nu')}, \quad \mu = \frac{\mu'(\nu' + \lambda') - 2\nu'\lambda'}{2\mu' - (\nu' + \lambda')}, \quad \nu = \frac{\nu'(\lambda' + \mu') - 2\lambda'\mu'}{2\nu' - (\lambda' + \mu')}$$

onde segue che, se il piano *fisso* è rappresentato dall'equazione 17), il piano *congiunto* lo sarà dalla 16). È poi degno d'osservazione che i sei punti di parametri λ, μ, ν; λ', μ', ν', ne' quali i due piani 16) e 17) *congiunti* l'uno all'altro incontrano la cubica gobba, costituiscono un sistema in involuzione. Cioè: *se un piano è congiunto ad altro, viceversa questo è congiunto a quello; e i sei punti in cui la cubica gobba è incontrata da due piani fra loro congiunti sono in involuzione.*

28. Continuando nell'argomento del paragrafo precedente, pongasi:

$$\begin{aligned}
A'' &= A - 3\nu' B + 3\nu'^2 C - \nu'^3 D \\
B'' &= A - (2\nu' + \mu')B + \nu'(2\mu' + \nu')C - \mu'\nu'^2 D \\
C'' &= A - (2\mu' + \nu')B + \mu'(2\nu' + \mu')C - \nu'\mu'^2 D \\
D'' &= A - 3\mu' B + 3\mu'^2 C - \mu'^3 D
\end{aligned}$$

onde le equazioni 2) si trasformeranno nelle seguenti:

$$A'' : B'' : C'' : D'' = y^3 : y^2 : y : 1$$

ove

$$y = \frac{\omega - \nu'}{\omega - \mu'}$$

e l'equazione 17) diverrà:

$$B'' - lC'' = 0$$

ove:

$$l = \frac{\lambda' - \nu'}{\lambda' - \mu'}$$

ossia le equazioni dei piani congiunti 16), 17) saranno:

16) $\qquad B' - kC' = 0 \qquad\qquad$ 17) $\qquad B'' - lC'' = 0\,.$

Per un dato valore di ω abbiamo nel piano 17) il polo:

$$A' : B' : C' : D' = 3kx^2 : x(2x - k) : x - 2k : -3$$

e nel piano 16) il polo:

$$A'' : B'' : C'' : D'' = 3ly^2 : y(2y - l) : y - 2l : -3\,.$$

Variando ω, questi due poli generano le due *linee de' poli* situate rispettivamente ne' piani 17) e 16). Le equazioni della retta che unisce i due poli corrispondenti ad ω qualsivoglia si ponno scrivere così:

$$\frac{y(1-2k)}{2-k}\left(4A' + 3kB' - 6k^2C' + 4k^3D'\right) + \left(A' - 6kB' + 12k^2C' - 8k^3D'\right) = 0$$

$$\frac{y(1-2k)}{2-k}\left(8A' - 12kB' + 6k^2C' - k^3D'\right) - \left(A' - 6kB' + 3k^2C' + 4k^3D'\right) = 0$$

epperò, variando ω ossia variando y, questa retta genera un iperboloide. Cioè: *dati due piani tra loro congiunti, le linee de' poli in essi situate giacciono sopra di uno stesso iperboloide ad una falda.*

29. Siano date nello spazio la cubica gobba 2) e le due rette:

$$A-(a+b)B+ab\,C=0\,, \qquad B-(c+d)C+cd\,D=0$$
$$A-(\alpha+\beta)B+\alpha\beta\,C=0\,, \qquad B-(\gamma+\delta)C+\gamma\delta\,D=0$$

situate comunque l'una rispetto all'altra. Qual'è la superficie rigata generata da una retta mobile che incontri costantemente quelle tre linee (direttrici)? Pongasi per brevità:

$$E=B-(c+d)C+cd\,D \qquad E'=B-(\gamma+\delta)C+\gamma\delta\,D$$
$$H=A-(a+b)B+ab\,C \qquad H'=A-(\alpha+\delta)B+\alpha\beta\,C$$
$$F=(a+b)E+H \qquad F'=(\alpha+\beta)E'+H'$$
$$G=(c+d)H+ab\,E \qquad G'=(\gamma+\delta)H'+\alpha\beta\,E'.$$

Essendo $E=H=0$, $E'=H'=0$ le equazioni delle due direttrici rettilinee, la generatrice potrà rappresentarsi colle:

$$E-\lambda H=0\,, \qquad E'-\lambda' H'=0$$

purchè si determinino λ e λ' in modo che queste equazioni siano soddisfatte entrambe dalle 2) ossia da:

$$E:H:E':H'=(\omega-c)(\omega-d):\omega(\omega-a)(\omega-b):(\omega-\gamma)(\omega-\delta):\omega(\omega-\alpha)(\omega-\beta)$$

onde dovrà essere:

$$\lambda=\frac{(\omega-c)(\omega-d)}{\omega(\omega-a)(\omega-b)}\,, \quad \lambda'=\frac{(\omega-\gamma)(\omega-\delta)}{\omega(\omega-\alpha)(\omega-\beta)}\,.$$

Le equazioni della retta generatrice saranno per conseguenza:

$$\omega^3E-\omega^2F+\omega G-cdH=0\,, \qquad \omega^3E'-\omega^2F'+\omega G'-\gamma\delta H'=0.$$

Il risultato della eliminazione di ω da queste equazioni è:

$$\begin{vmatrix} K'G - KG' & KF' - K'F & K'E - KE' \\ KF' - K'F & K'E - KE' + FG' - F'G & GE' - G'E \\ K'E - KE' & GE' - G'E & EF' - E'F \end{vmatrix} = 0$$

ove $K = cd\,H$, $K' = \gamma\delta\,H'$. Dunque il luogo richiesto è una superficie del sesto ordine (57).

Veniamo ora ai casi particolari.

1.° Sia $a = c$, cioè la prima direttrice rettilinea si appoggi in un punto alla cubica gobba: allora si ha $\lambda = \dfrac{\omega - d}{\omega(\omega - b)}$, quindi, posto $L = H + bE$, si ha l'equazione:

$$\begin{vmatrix} LK' - dHG' & dHF' - K'E & -dH \\ dHF' - K'E & -dHE' + EG' - F'L & L \\ -dHE' & E'L & E \end{vmatrix} = 0$$

che è del quinto grado rispetto alle coordinate A, B, C, D (58).

2.° Sia $a = c$, $b = d$, cioè la prima direttrice rettilinea si appoggi alla cubica in due punti; allora $\lambda = \dfrac{1}{\omega}$, quindi si ha l'equazione:

$$H^3E' - H^2EF' + HE^2G' - \gamma\delta E^3H' = 0$$

che è del quarto grado (59).

3.° Sia $a = c$, $\alpha = \gamma$, cioè le due direttrici rettilinee si appoggino ciascuna in un punto alla cubica gobba: allora $\lambda = \dfrac{\omega - d}{\omega(\omega - b)}$, $\lambda' = \dfrac{\omega - \delta}{\omega(\omega - \beta)}$, quindi si ha:

$$\left(dHE' - \delta H'E\right)^2 - \left(\delta H'(H + bE) - dH(H' + \beta E')\right)\left(E(H' + \beta E') - E'(H + bE)\right) = 0$$

equazione del quarto grado (59).

4.° Sia $a = c$, $b = d$, $\alpha = \gamma$ cioè una delle direttrici rettilinee si appoggi in due punti e l'altra in un solo punto alla cubica gobba: allora $\lambda = \dfrac{1}{\omega}$, $\lambda' = \dfrac{\omega - \delta}{\omega(\omega - \beta)}$, e si ha la:

$$H^2E' - HE(H' + \beta E') + \delta E^2H' = 0$$

equazione del terzo grado (60).

5.° Finalmente, se fosse $a = c$, $b = d$, $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$, cioè se le due direttrici rettilinee fossero entrambe corde della cubica gobba, le equazioni della generatrice sarebbero:

$$\omega E - H = 0\,, \qquad \omega E' - H' = 0$$

da cui eliminando ω si ha:

$$EH' - E'H = 0$$

equazione rappresentante un iperboloide (60).

Nel 4.° caso la superficie rigata è, come si è veduto, del terz' ordine. La direttrice rettilinea $E = H = 0$ corda della cubica gobba ha la proprietà che da ciascun punto di essa partono due generatrici, le cui equazioni sono:

$$\omega E - H = 0\,, \qquad (\delta - \omega) H' - \omega(\beta - \omega) E' = 0$$
$$\omega' E - H = 0\,, \qquad (\delta - \omega') H' - \omega'(\beta - \omega') E' = 0$$

ove:

$$\delta(\omega + \omega') - \omega\omega' - \delta\beta = 0\,.$$

Queste due generatrici, partenti da uno stesso punto della direttrice $E = H = 0$, incontrano la cubica gobba ne' punti che hanno per parametri ω, ω'. Le coppie di punti analoghi a questi due sono in involuzione, il che risulta dalla equazione che lega insieme ω, ω'. Perciò le corde della cubica congiungenti i punti omologhi sono generatrici dell' iperboloide:

$$AC - B^2 + \delta(BC - AD) + \delta\beta(BD - C^2) = 0$$

il quale passa per la cubica gobba e per l' altra direttrice rettilinea $E' = H' = 0$.

30. La retta $B = C = 0$ corda della cubica gobba 2) sia l' asse comune di due fasci omografici di piani. Sia l' equazione d' un piano qualunque del primo fascio:

$$B - \omega C = 0$$

quella del piano omologo nell' altro fascio sarà:

$$B - \frac{a + b\omega}{c + d\omega} C = 0$$

a, b, c, d costanti arbitrarie. Questi due piani incontrano la cubica gobba ne' due punti, i parametri de' quali sono ω ed $\dfrac{a + b\omega}{c + d\omega}$; la retta che unisce questi punti è:

$$(c + d\omega) A - \left(a + (b + c)\omega + d\omega^2\right) B + (a + b\omega)\omega\, C = 0\,,$$
$$(c + d\omega) B - \left(a + (b + c)\omega + d\omega^2\right) C + (a + b\omega)\omega\, D = 0$$

quindi il luogo geometrico di questa retta è una superficie del quart'ordine. Per ciascun punto della cubica gobba passano due generatrici della superficie; infatti considerando le due divisioni omografiche sulla linea, se il punto ω si risguarda come appartenente alla prima, gli corrisponde nell'altra il punto $\frac{a+b\omega}{c+d\omega}$, e se lo stesso punto ω si considera come appartenente alla seconda divisione, gli corrisponde nella prima il punto $\frac{a-c\omega}{d\omega-b}$; e le due rette congiungenti il punto ω ai punti $\frac{a+b\omega}{c+d\omega}$, $\frac{a-c\omega}{d\omega-b}$ sono, per la definizione della superficie, generatrici di questa. Ne segue che la cubica gobba è una linea di stringimento [15] per la superficie medesima (55).

31. Abbiansi sulla cubica gobba 2) quattro punti di parametri $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$, e un punto dello spazio, per es. quello rappresentato dalle equazioni:

$$18) \qquad A=0\,, \quad D=0\,, \quad B-\theta C=0\,.$$

Le equazioni delle quattro rette 1, 2, 3, 4 che congiungono quest'ultimo punto ai primi quattro sono:

$$A : B-\theta C : D = \theta_r^3 : \theta_r(\theta_r-\theta) : 1 \ldots (r=1,2,3,4).$$

Il piano delle rette 12 è:

$$(\theta_1+\theta_2-\theta)\,A+\theta_1\theta_2\Big(\theta_1\theta_2-\theta(\theta_1+\theta_2)\Big)\,D-(\theta_1^2+\theta_1\theta_2+\theta_2^2)\,(B-\theta C)=0$$

esso incontra la cubica gobba nel punto il cui parametro è:

$$\omega_1=\frac{\theta(\theta_1+\theta_2)-\theta_1\theta_2}{\theta_1+\theta_2-\theta}\,;$$

così il piano delle rette 34 incontra la cubica gobba nel punto:

$$\omega_2=\frac{\theta(\theta_3+\theta_4)-\theta_3\theta_4}{\theta_3+\theta_4-\theta}\,.$$

Il piano determinato dai punti ω_1, ω_2 e dal punto 18) incontra la cubica medesima nel punto che ha per parametro:

$$x=\frac{\theta(\omega_1+\omega_2)-\omega_1\omega_2}{\omega_1+\omega_2-\theta}=\frac{\theta^3 S_1-\theta^2 S_2+S_4}{\theta^3-\theta S_2+S_3}$$

ove S_r è la somma de' prodotti delle $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$, prese ad r ad r. Questo punto il cui parametro x è una funzione simmetrica de' parametri $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ varia perciò soltanto col variare de' punti dati; esso punto si chiamerà *opposto ai quattro punti*

$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ *relativamente al punto* 18) (per questa denominazione veggasi SALMON, *on the higher plane curves,* pag. 133).

Ora considero il cono di second' ordine:

$$A^2 + l(B - \theta C)^2 + mD^2 + nAD + pA(B - \theta C) + qD(B - \theta C) = 0$$

che ha il vertice al punto 18); questo cono incontra la cubica gobba in sei punti, i parametri de' quali sono le radici della equazione:

$$\omega^6 + l\omega^2(\omega - \theta)^2 + m + n\omega^3 + p\omega^4(\omega - \theta) + q\omega(\omega - \theta) = 0.$$

Siano $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_6$ queste radici, e Z_r la somma dei prodotti di esse medesime prese ad r ad r; avremo le:

$$Z_1 = -p\,, \quad Z_2 = l - p\theta\,, \quad Z_3 = 2l\theta - n\,, \quad Z_4 = q + l\theta^2\,, \quad Z_5 = q\theta\,, \quad Z_6 = m$$

da cui eliminando l, m, n, p, q si ha:

$$\theta^4 Z_1 - \theta^3 Z_2 + \theta Z_4 - Z_5 = 0.$$

Se in questa equazione si rendono esplicite le quantità θ_5, θ_6, essa prende la forma:

19) $$a(\theta_5 + \theta_6) - b\theta_5\theta_6 + c = 0$$

ove:

$$a = \theta^4 - \theta^3 S_1 + \theta S_3 - S_4\,, \quad b = \theta^3 - \theta S_2 + S_3\,, \quad c = \theta^4 S_1 - \theta^3 S_2 + \theta S_4.$$

[16] Il piano de' due punti θ_5, θ_6 e del punto 18) incontra la cubica gobba nel punto il cui parametro è:

$$\frac{\theta(\theta_5 + \theta_6) - \theta_5\theta_6}{\theta_5 + \theta_6 - \theta}$$

ma in virtù della 19) e della identica:

$$a\theta - b\theta^2 + c = 0$$

si ha:

$$\frac{\theta(\theta_5 + \theta_6) - \theta_5\theta_6}{\theta_5 + \theta_6 - \theta} = \frac{c}{\theta b}$$

dunque il piano anzidetto incontra la cubica gobba nel punto *opposto* ai punti $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$, ossia: *se un cono di second' ordine incontra una cubica gobba in sei punti, il piano passante per due di questi punti e pel vertice del cono passa anche pel punto opposto agli altri quattro* (SALMON, ibid.).

[17]

Cremona, giugno 1858.