4.

SUR LES QUESTIONS 321 ET 322. [7]

Nouvelles Annales de Mathématiques, 1.re série, tome XVI (1857), pp. 41-43.

Question 321.

Soient a_r, b_r, c_r les coordonnées du sommet $r^{rième}$ de l'hexagone; l_r la longueur du côté $(r, r+1)$; $\alpha_r, \beta_r, \gamma_r$ les cosinus des angles du même côté avec les axes. On a, par les données du problème,

$$\begin{array}{lll}
a_2 = a_1 + \alpha_1 l_1 & , \quad b_2 = b_1 + \beta_1 l_1 & , \quad c_2 = c_1 + \gamma_1 l_1 \\
a_3 = a_1 + \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 & , \quad \ldots & , \quad \ldots \\
a_4 = a_1 + \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 & , \quad \ldots & , \quad \ldots \\
a_5 = a_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 & , \quad \ldots & , \quad \ldots \\
a_6 = a_1 + \alpha_3 l_3 & , \quad \ldots & , \quad \ldots
\end{array}$$

Par conséquent, l'équation du plan passant par les milieux des côtés (1,2), (2,3), (3,4) sera

$$\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 \\
2x & 2a_1 + \alpha_1 l_1 & 2a_1 + 2\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 & 2a_1 + 2\alpha_1 l_1 + 2\alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 \\
2y & 2b_1 + \beta_1 l_1 & 2b_1 + 2\beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 & 2b_1 + 2\beta_1 l_1 + 2\beta_2 l_2 + \beta_3 l_3 \\
2z & 2c_1 + \gamma_1 l_1 & 2c_1 + 2\gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 & 2c_1 + 2\gamma_1 l_1 + 2\gamma_2 l_2 + \gamma_3 l_3
\end{vmatrix} = 0,$$

ou, en transformant ce déterminant par des théorèmes très-connus,

$$\begin{vmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 \\
4(x - a_1) & \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 & \alpha_3 l_3 + \alpha_1 l_1 & \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 \\
4(y - b_1) & \beta_2 l_2 + \beta_3 l_3 & \beta_3 l_3 + \beta_1 l_1 & \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 \\
4(z - c_1) & \gamma_2 l_2 + \gamma_3 l_3 & \gamma_3 l_3 + \gamma_1 l_1 & \gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2
\end{vmatrix} = 0.$$

En observant de quelle façon cette équation renferme les éléments qui composent les coordonnées des sommets de l'hexagone, on voit que la même équation représente aussi le plan passant par les milieux des côtés (4, 5), (5, 6), (6, 1). Donc, etc.

Question 322.

Soient $2n$ le nombre des côtés du polygone; a_r, b_r, c_r les coordonnées du sommet $r^{ième}$; l_r la longueur du côté $(r, r+1)$; $\alpha_r, \beta_r, \gamma_r$ les cosinus des angles de ce côté avec les axes. En supposant que r soit un des nombres $1, 2, 3, \ldots, n$, on a

$$a_r = a_1 + \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \ldots + \alpha_{r-1} l_{r-1},$$

$$a_{n+r} = a_1 + \alpha_r l_r + \alpha_{r+1} l_{r+1} + \ldots + \alpha_n l_n,$$

donc

$$a_r + a_{n+r} = 2a_1 + \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \ldots \alpha_n l_n,$$

c'est-à-dire $a_r + a_{n+r}$ est indépendant de r; analoguement pour $b_r + b_{n+r}$ et $c_r + c_{n+r}$.

Je considère le point dont les coordonnées sont

$$x = \frac{1}{2}\left(a_r + a_{n+r}\right), \quad y = \frac{1}{2}\left(b_r + b_{n+r}\right), \quad z = \frac{1}{2}\left(c_r + c_{n+r}\right);$$

ces coordonnées satisfont évidemment aux équations de la droite $(r, n+r)$, qui sont

$$\frac{x - a_r}{a_r - a_{n+r}} = \frac{y - b_r}{b_r - b_{n+r}} = \frac{z - c_r}{c_r - c_{n+r}}$$

et satisfont aussi aux équations de la droite qui joint les milieux des côtés $(r, r+1)$, $(n+r, n+r+1)$, savoir

$$\frac{2x - a_r - a_{r+1}}{a_r + a_{r+1} - a_{n+r} - a_{n+r+1}} = \frac{2y - b_r - b_{r+1}}{b_r + b_{r+1} - b_{n+r} - b_{n+r+1}} = \frac{2z - c_r - c_{r+1}}{c_r + c_{r+1} - c_{n+r} - c_{n+r+1}};$$

donc le point nommé est commun à toutes les droites qui joignent les sommets opposés et à celles qui joignent les milieux des côtés opposés, et le même point est le milieu de chacune de ces droites.