7.

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 369. [7]

Nouvelles Annales de Mathématiques, 1.er série, tome XVI (1857), pp. 251-252.

Soient

$$p=0\,, \quad q=0\,, \quad r=0$$

les équations des côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC;

$$q-r=0\,, \quad r-p=0\,, \quad p-q=0$$

sont donc les équations de trois droites passant respectivement par les sommets A, B, C et se rencontrant au même point D; soient α, β, γ les points où AD, BD, CD rencontrent BC, CA, AB. Soient

$$\begin{aligned} lp + mq + nr &= 0\,, \\ l_1 p + m_1 q + n_1 r &= 0 \end{aligned}$$

les équations de deux droites R, R_1 qui rencontrent respectivement BC, CA, AB aux points a, a_1 ; b, b_1 ; c, c_1 ; par conséquent, les équations des droites Da, Da_1, son

$$\begin{aligned} n\,(r-p) - m\,(p-q) &= 0\,, \\ n_1(r-p) - m_1(p-q) &= 0\,. \end{aligned}$$

Le rapport anharmonique des quatre droites DB, DC, $D\alpha$, Da,

$$\begin{aligned} r-p &= 0\,, \\ p-q &= 0\,, \\ r-p-\quad (p-q) &= 0\,, \\ r-p-\frac{m}{n}(p-q) &= 0 \end{aligned}$$

est $\frac{n}{m}$ (Salmon, *Conic sections*, p. 53) et le rapport anharmonique des droites conjuguées DC, DB, Dα, Da_1,

$$\begin{aligned} p-q &= 0, \\ r-p &= 0, \\ p-q-\phantom{\frac{n_1}{m}}(r-p) &= 0, \\ p-q-\frac{n_1}{m}(r-p) &= 0, \end{aligned}$$

est $\frac{m_1}{n_1}$; donc les points B, C, α, a, a_1 seront en involution si l'on a

$$mm_1 = nn_1.$$

Ainsi les conditions nécessaires et suffisantes pour que les trois systèmes de cinq points

$$\begin{matrix} B, & C, & \alpha, & a, & a_1, \\ C, & A, & \beta, & b, & b_1, \\ A, & B, & \gamma, & c, & c_1, \end{matrix}$$

(α, β, γ points doubles) soient en involution, seront

$$ll_1 = mm_1 = nn_1.$$

Il s'ensuit qu'en prenant arbitrairement la droite R,

$$lp + mq + nr = 0,$$

la droite R_1 sera

$$\frac{p}{l} + \frac{q}{m} + \frac{r}{n} = 0.$$