6.

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 368 (Cayley). [7]

Nouvelles Annales de Mathématiques, 1.re série, tome XVI (1857) p. 250.

Toute conique qui touche les côtés du triangle ABC ($p=0$, $q=0$, $r=0$) est représentée par l'équation (Salmon, *Conic sections*, 3.e édition, p. 247)

$$l^2p^2+m^2q^2+n^2r^2-2\,mnqr-2\,nlrp-2\,lmpq=0\ ^{*)},$$

où l, m, n sont des indéterminées. Les points α, β, γ étant déterminés respectivement par les couples d'équations simultanées

$$\begin{aligned} p&=0\,, & q-r&=0\,;\\ q&=0\,, & r-p&=0\,;\\ r&=0\,, & p-q&=0\,; \end{aligned}$$

la conique passera par les points α, β, γ, si l'on satisfait aux conditions

$$\begin{aligned} m^2+n^2-2\,mn&=0\,,\\ n^2+l^2-2\,nl&=0\,,\\ l^2+m^2-2\,lm&=0\,, \end{aligned}$$

ou bien

$$l=m=n\,;$$

donc l'équation cherchée est

$$p^2+q^2+r^2-2\,qr-2\,rp-2\,pq=0\,.$$

*) Ou bien $(lp)^{\frac{1}{2}}+(mq)^{\frac{1}{2}}+(nr)^{\frac{1}{2}}=0$.