3.

INTORNO AD ALCUNI TEOREMI DI GEOMETRIA SEGMENTARIA.

Programma dell'I. R. Ginnasio liceale di Cremona, alla fine dell'anno scolastico 1857, pp. 1-14.

Scopo di questa breve nota è la dimostrazione di alcuni recentissimi teoremi enunciati dal signor De Lafitte nelle *questions proposées* del *cahier de mai* 1857, *Annales de Mathématiques rédigées par M. Terquem.* A tale uopo mi servirò delle coordinate trilineari e delle tangenziali, cioè farò uso di quel metodo (sì elegante ed efficace, ove si tratti di teoremi della geometria di posizione), che alcuni matematici inglesi chiamano *abridged notation* *).

1.

Si abbiano due figure omografiche, poste in uno stesso piano. È noto esistere in generale tre rette omologhe a sè medesime, le quali si denominano *rette doppie.* I punti d'intersezione di queste rette sono *punti doppi.* Se si assumono le rette doppie come assi di coordinate trilineari *(lines of reference),* le formole analitiche per la trasformazione omografica delle figure, riescono assai semplici.

Siano a, b, c quantità arbitrarie; x, y, z le lunghezze delle perpendicolari condotte sulle tre rette doppie da un punto qualunque del piano delle due figure; cioè le x, y, z siano le coordinate trilineari del medesimo punto. Risguardando questo punto come

*) Per apprezzare i servigi che questo mezzo analitico rende alla geometria, vedi i lavori degli abilissimi geometri — Bobillier, Plücker, Salmon, Hearn, Brioschi, Faure, ecc. Annales de Gergonne — Crelle, Journal für die Mathematik — Salmon's Conic Sections — Salmon's Higher plane curves — Hearn's Researches on curves of the second order — Annales de M. Terquem — Annali del signor Tortolini ecc.

appartenente alla prima figura, le coordinate trilineari del punto omologo nell'altra saranno generalmente esprimibili con:

$$ax\,, \quad by\,, \quad cz\,.$$

Se il punto (x, y, z) movendosi nel piano descrive una linea rappresentata dall'equazione:

$$F(x\,, \ y\,, \ z) = 0$$

il luogo geometrico del punto omologo avrà per equazione:

$$F\left(\frac{x}{a}\,, \ \frac{y}{b}\,, \ \frac{z}{c}\right) = 0\,.$$

Così, se la retta:

$$Ax + By + Cz = 0$$

si considera come appartenente alla prima figura, la sua omologa sarà:

$$\frac{A}{a}x + \frac{B}{b}y + \frac{C}{c}z = 0\,.$$

2.

Qualunque conica circoscritta al triangolo avente i lati nelle rette doppie:

$$x = 0\,, \quad y = 0\,, \quad z = 0$$

è rappresentabile coll'equazione:

$$\frac{l}{x} + \frac{m}{y} + \frac{n}{z} = 0 \tag{1}$$

ove l, m, n sono indeterminate. Un punto qualunque della conica si può rappresentare col sistema:

$$t\,(lz + nx) = lz\,, \quad \frac{1}{t}\,(mz + ny) = mz$$

a cui si può sostituire il seguente:

$$x : y : z = \left(\frac{1}{t} - 1\right) l : (t - 1)\, m : n$$

ove t è la variabile che individua il punto sulla conica.

La retta che unisce il punto (t), considerato come facente parte della prima figura, al suo omologo, ha per equazione:

$$(b-c)\,nx-(a-b)\,lz+\frac{l}{mt}\Big((a-b)\,mz-(c-a)\,ny\Big)=0 \tag{2}$$

quindi, qualunque sia t, cioè qualunque sia la coppia dei punti omologhi, questa retta passa pel punto individuato dalle equazioni:

$$\frac{b-c}{l}\,x=\frac{c-a}{m}\,y=\frac{a-b}{n}\,z$$

ossia dalle:

$$x:y:z=\frac{l}{b-c}:\frac{m}{c-a}:\frac{n}{a-b}. \tag{3}$$

Questo punto evidentemente è sulla conica, e per esso è

$$t=\frac{c-b}{c-a}.$$

Lo stesso punto, considerato come appartenente alla seconda figura, ha per omologo quello che ha le seguenti coordinate:

$$x:y:z=\frac{l}{a\,(b-c)}:\frac{m}{b\,(c-a)}:\frac{n}{c\,(a-b)} \tag{4}$$

il quale è pure sulla conica, e gli corrisponde:

$$t=\frac{a\,(c-b)}{b\,(c-a)}.$$

Per ottenere l'equazione della retta che passa pel punto (3) considerato come appartenente alla prima figura, e pel suo omologo, basta porre nella (2):

$$t=\frac{c-b}{c-a};$$

si ha così:

$$\frac{(b-c)^2}{l}\,x+\frac{(c-a)^2}{m}\,y+\frac{(a-b)^2}{n}\,z=0. \tag{5}$$

La tangente alla conica nel punto (t) ha per equazione:

$$\frac{t^2}{l}\,x+\frac{1}{m}\,y+\frac{(t-1)^2}{n}\,z=0$$

dunque la retta (5) è tangente alla conica (1) nel punto (3).

La retta che unisce il punto (t), considerato come appartenente alla seconda figura, col suo omologo, è:

$$a(b-c)\,nx - c(a-b)\,lz + \frac{l}{mt}\Big(c(a-b)\,mz - b(c-a)\,ny\Big) = 0$$

la quale, qualunque sia t, passa pel punto (4).

La retta che unisce il punto (4) considerato come appartenente alla seconda figura, col suo omologo, è rappresentata dall'equazione precedente, ove si faccia:

$$t = \frac{a(c-b)}{b(c-a)},$$

cioè dalla:

$$\frac{a^2(b-c)^2}{l}\,x + \frac{b^2(c-a)^2}{m}\,y + \frac{c^2(a-b)^2}{n}\,z = 0$$

epperò la retta medesima è tangente alla conica nel punto (4).

Così è dimostrato il teorema:

Date due figure omografiche in un piano, ed una conica circoscritta al triangolo formato dalle tre rette doppie, tutte le rette che congiungono i punti di essa, considerati come facenti parte della prima figura, ai loro omologhi, concorrono in uno stesso punto A, *il quale appartiene alla conica medesima. Considerando* A *come punto della seconda figura, ha il suo omologo* B, *il quale appartiene esso pure alla conica, ed è quello in cui concorrono tutte le rette congiungenti i punti della conica (come punti della seconda figura) ai loro omologhi. I punti* A *e* B, *considerati come appartenenti, quello alla prima e questo alla seconda figura, hanno i rispettivi omologhi* C *e* D. *Le rette* AC *e* BD *sono tangenti alla conica.*

Osservazione. In luogo delle formole precedenti se ne sarebbero ottenute altre meno semplici ma del tutto simmetriche, quando si fossero assunte le equazioni:

$$x : y : z = \frac{l}{(m-n)(l+t)} : \frac{m}{(n-l)(m+t)} : \frac{n}{(l-m)(n+t)}$$

in luogo di quelle assunte effettivamente per rappresentare il punto generico sulla conica (1). Una osservazione analoga valga per le proposizioni che seguono.

3.

L'equazione generale di una conica inscritta nel triangolo:

$$x=0\,,\quad y=0\,,\quad z=0$$

è la seguente:

$$\sqrt{(lx)} + \sqrt{(my)} + \sqrt{(nz)} = 0 \tag{6}$$

quindi un punto qualunque di questa linea potrà rappresentarsi col sistema:

$$x : y : z = \left(\frac{t+1}{2}\right)^2 \frac{1}{l} : \left(\frac{t-1}{2}\right)^2 \frac{1}{m} : \frac{1}{n}$$

e l'equazione della tangente in questo punto sarà:

$$2(t-1)\, lx - 2\,(t+1)\, my - (t^2-1)\, nz = 0. \tag{7}$$

Questa retta, considerata come appartenente alla prima figura, ha per omologa la:

$$2(t-1)\frac{l}{a}\, x - 2\,(t+1)\frac{m}{b}\, y - (t^2-1)\frac{n}{c}\, z = 0$$

e le due rette s'incontrano nel punto:

$$x : y : z = -\frac{t+1}{2}\,\frac{a(b-c)}{l} : \frac{t-1}{2}\,\frac{b(c-a)}{m} : \frac{c(a-b)}{n},$$

il qual punto, qualunque sia t, cioè qualunque sia la coppia delle rette omologhe trovasi sulla retta:

$$\frac{l}{a(b-c)}\, x + \frac{m}{b(c-a)}\, y + \frac{n}{c(a-b)}\, z = 0. \tag{8}$$

Questa equazione, moltiplicata per la quantità:

$$\frac{4\,ab\,(c-a)\,(c-b)}{c(b-a)}$$

assume la forma (7) ove sia:

$$t = \frac{2\,ab - c\,(a+b)}{c\,(b-a)}; \tag{9}$$

dunque la retta (8) è tangente alla conica (6) nel punto (9), cioè nel punto:

$$x : y : z = \frac{a^2\,(b-c)^2}{l} : \frac{b^2\,(c-a)^2}{m} : \frac{c^2\,(a-b)^2}{n}.$$

La retta (8), considerata come appartenente alla prima figura ha per omologa la:

$$\frac{l}{a^2(b-c)}\, x + \frac{m}{b^2(c-a)}\, y + \frac{n}{c^2(a-b)}\, z = 0$$

e questa incontra la (8) precisamente nel punto (9).

Se la retta (8) si risguarda come facente parte della seconda figura, la sua omologa è rappresentata dalla:

$$\frac{l}{b-c}\,x+\frac{m}{c-a}\,y+\frac{n}{a-b}\,z=0 \tag{10}$$

equazione, la quale moltiplicata per:

$$\frac{4\,(c-a)\,(c-b)}{a-b}$$

assume la forma (7) ove sia:

$$t=\frac{2c-(a+b)}{a-b};$$

dunque la retta (10) è tangente alla conica (6) nel punto determinato da questo valore di t, ossia nel punto:

$$x:y:z=\frac{(b-c)^2}{l}:\frac{(c-a)^2}{m}:\frac{(a-b)^2}{n}. \tag{11}$$

Analogamente le tangenti della conica (6), considerate come appartenenti alla seconda figura, incontrano le loro omologhe in punti tutti situati nella retta (10). Questa retta, considerata come appartenente alla seconda figura incontra la sua omologa nel punto (11).

Concludiamo quindi il teorema:

Se si ha una conica inscritta nel triangolo formato dalle tre rette doppie di un sistema di due figure omografiche, le tangenti ad essa, considerate come appartenenti alla prima figura incontrano le loro omologhe in punti tutti situati sopra una medesima retta L, *che è pure tangente alla conica. Questa retta, risguardata come appartenente alla seconda figura ha la sua omologa* M, *la quale tocca anch'essa la conica ed è quella in cui le tangenti della conica, considerate come facenti parte della seconda figura, incontrano le rispettive omologhe. Le due rette* L *ed* M, *considerate come appartenenti, l'una alla prima figura, l'altra alla seconda, hanno le loro omologhe* P *e* Q; *il punto comune ad* L, P *e quello comune ad* M, Q *appartengono entrambi alla conica.*

4.

Riprese le denominazioni del paragrafo secondo, si considerino due punti $(t=v)$, $(t=w)$ sulla conica (1); e per essi le due rette:

$$\mathrm{L}x+\mathrm{M}y+\mathrm{N}z=0 \quad , \quad \mathrm{P}x+\mathrm{Q}y+\mathrm{R}z=0; \tag{12}$$

saranno identiche le:

$$(13)\qquad \mathrm{L}\left(\frac{1}{v}-1\right)l+\mathrm{M}\,(v-1)\,m+\mathrm{N}n=0$$

$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{w}-1\right)l+\mathrm{Q}\,(w-1)\,m+\mathrm{R}n=0\,.$$

Per trovare le coordinate trilineari dell'altro punto comune alla prima delle rette (12) ed alla conica (1), elimino z fra le equazioni di queste linee ed ottengo, avuto riguardo alla prima delle (13):

$$vm\,\mathrm{L}x^2+(\mathrm{L}l+\mathrm{M}m\,v^2)\,xy+vl\,\mathrm{M}y^2=0$$

da cui:

$$x:\,y=-\mathrm{M}v:\,\mathrm{L}\,,$$ [5]

quindi pel punto richiesto si avrà:

$$t=\frac{l}{mv}\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{M}}\,.$$

Analogamente, per l'altro punto comune alla conica (1) ed alla seconda delle rette (12), sarà:

$$t=\frac{l}{mw}\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}\,.$$

Epperò, affinchè questi punti coincidano, è necessario e sufficiente che sia:

$$\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{M}}:\,v=\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}:\,w$$

cioè:

$$\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{M}}=vs\,,\ \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}=ws$$

ove s è un'indeterminata.

Quindi le equazioni delle rette (12) divengono:

$$vsnx+ny+(1-v)\ (m-ls)\,z=0$$

$$wsnx+ny+(1-w)\,(m-ls)\,z=0\,.$$

Affinchè queste rette siano omologhe, è necessario che la seconda equazione si possa dedurre dalla prima col porre in questa:

$$\frac{x}{a}\,,\ \frac{y}{b}\,,\ \frac{z}{c}$$

ordinatamente in luogo di:

$$x\,,\quad y\,,\quad z\,;$$

la qual condizione dà quest'unico sistema di valori per v e w:

$$v=\frac{a}{b}\,\frac{(c-b)}{(c-a)}\,,\quad w=\frac{c-b}{c-a}\,.$$

I due punti a cui corrispondono questi valori di t sono omologhi l'uno dell'altro, e sono quei medesimi punti (3) e (4) che già si sono incontrati nel teorema del paragrafo secondo. Concludiamo quindi il teorema:

Su di una conica circoscritta al triangolo formato dalle rette doppie di un sistema di due figure omografiche esistono sempre due punti (e due soli) tali che due rette rotando intorno ad essi ed intersecandosi sulla conica si mantengano costantemente omologhe nelle due figure. Tali punti sono gli stessi A *e* B *di cui si fa cenno nel teorema del paragrafo secondo.*

5.

Riprese le denominazioni del paragrafo terzo, s'imaginino due tangenti alla conica (6) in due punti fissi $(t=v)$, $(t=w)$, ed una tangente nel punto variabile (t). Questa tangente incontra quelle rispettivamente ne' punti determinati dalle equazioni:

$$x:y:z=\frac{(t+1)(v+1)}{4}\,\frac{1}{l}:\frac{(t-1)(v-1)}{4}\,\frac{1}{m}:\frac{1}{n}\,,$$

$$x:y:z=\frac{(t+1)(w+1)}{4}\,\frac{1}{l}:\frac{(t-1)(w-1)}{4}\,\frac{1}{m}:\frac{1}{n}\,.$$

Affinchè questi punti siano omologhi, è necessario e sufficiente che si abbia:

$$a:w+1=c:v+1\,,\quad b:w-1=c:v-1$$

da cui si ha l'unico sistema di valori per v, w:

$$v=\frac{2c-(a+b)}{a-b}\,,\quad w=\frac{2ab-c\,(a+b)}{c\,(b-a)}\,;$$

i quali valori di t corrispondono alle due tangenti omologhe (8) e (10) della conica che ci occupa.

Abbiamo così il teorema:

Date due figure omografiche in un piano ed una conica inscritta nel triangolo formato dalle rette doppie, vi sono sempre due rette tangenti alla conica (e due sole) tali che una *retta la quale si muova mantenendosi tangente alla stessa conica, incontri quelle in due punti costantemente omologhi nelle due figure. Quelle due rette sono le* L *ed* M, *già incontrate nel teorema del paragrafo terzo.*

6.

Pel punto doppio:

$$x = y = 0$$

imagino una retta fissa:

$$mx - ly = 0$$

ed in essa il punto variabile:

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$$

ove n è indeterminata.

Una retta:

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z = 0$$

passerà per questo punto, purchè sia:

$$\mathrm{A}l + \mathrm{B}m + \mathrm{C}n = 0. \tag{14}$$

Questa retta incontra la sua omologa:

$$\frac{\mathrm{A}}{a}x + \frac{\mathrm{B}}{b}y + \frac{\mathrm{C}}{c}z = 0$$

nel punto:

$$x : y : z = \frac{a(b-c)}{\mathrm{A}} : \frac{b(c-a)}{\mathrm{B}} : \frac{c(a-b)}{\mathrm{C}}.$$

Da queste due equazioni e dalla (14) elimino A, B, C, ed ottengo così l'equazione del luogo geometrico de' punti analoghi al precedente e corrispondenti ad uno stesso valore della variabile n:

$$\frac{al(b-c)}{x} + \frac{bm(c-a)}{y} + \frac{cn(a-b)}{z} = 0$$

la quale rappresenta una conica circoscritta al triangolo:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

La tangente a questa conica nel punto:

$$x = y = 0$$

è:

$$al(b-c)\,y+bm(c-a)\,x=0$$

e quindi è indipendente da n. Dunque:

Date due figure omografiche in un piano, se per un punto doppio si conduce una retta fissa A *e su di questa si prende un punto* a, *tutte le rette della prima figura che passano per* a *incontrano le loro rispettive omologhe in punti situati su di una stessa conica, che passa pe' tre punti doppi. Tutte le coniche corrispondenti agli infiniti punti della retta* A *si toccano in uno stesso punto, il quale è il punto doppio pel quale passa la retta* A.

Reciprocamente, *se le coniche corrispondenti a due punti si toccano, questi punti sono in linea retta con un punto doppio ed il contatto ha luogo in questo punto.*

Infatti, i due punti siano determinati dalla equazione:

$$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$$

$$\frac{x}{\mathrm{L}}=\frac{y}{\mathrm{M}}=\frac{z}{\mathrm{N}}$$

a cui corrisponderanno rispettivamente le coniche:

$$\frac{al(b-c)}{x}+\frac{bm(c-a)}{y}+\frac{cn(a-b)}{z}=0$$

$$\frac{a\mathrm{L}(b-c)}{x}+\frac{b\mathrm{M}(c-a)}{y}+\frac{c\mathrm{N}(a-b)}{z}=0\,.$$

Siccome queste coniche passano entrambe pei punti doppi, così se esse si toccano, ciò avrà luogo in uno di tali punti. Sia per es. l'$x=y=0$. Le tangenti alle due coniche in questo punto sono:

$$al(b-c)\,y+bm(c-a)\,x=0\,,\quad a\mathrm{L}(b-c)\,y+b\mathrm{M}(c-a)\,x=0:$$

esse coincideranno se:

$$\mathrm{L}=sl\,,\quad \mathrm{M}=sm$$

ove s è un'indeterminata. Allora il secondo de' punti dati sarà rappresentato dalle equazioni:

$$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{sz}{\mathrm{N}}$$

cioè i due punti dati sono entrambi sulla retta:

$$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}$$

passante pel punto doppio:

$$x=y=0$$

il quale è quello in cui si toccano le due coniche.

7.

Sulla retta doppia:

$$z=0$$

fisso il punto:

$$lx+my=0\,,\quad z=0$$

e per esso imagino la retta variabile:

$$lx+my+nz=0$$

ove n è indeterminata.

Siano u, v, w le coordinate trilineari di un punto di questa retta: l'equazione della congiungente il punto stesso al suo omologo sarà:

$$\frac{b-c}{u}x+\frac{c-a}{v}y+\frac{a-b}{w}z=0$$

la quale equazione, eliminandone $u:w$ mediante l'identica:

$$lu+mv+nw=0$$

diviene:

$$\frac{v^2}{w^2}z-\frac{(b-c)\,lx-(c-a)\,my-(a-b)\,nz}{(a-b)\,m}\,\frac{v}{w}+\frac{(c-a)\,n}{(a-b)\,m}\,y=0\,.$$

La forma di questa equazione manifesta che la retta da essa rappresentata inviluppa la conica:

$$\frac{(c-a)\,n}{(a-b)\,m}\,yz-\left(\frac{(b-c)\,lx-(c-a)\,my-(a-b)\,nz}{2\,(a-b)\,m}\right)^2=0$$

ossia:

$$\sqrt{(l\,(b-c)\,x)}+\sqrt{(m\,(c-a)\,y)}+\sqrt{(n\,(a-b)\,z)}=0$$

conica inscritta nel triangolo:

$$x=0\,,\quad y=0\,,\quad z=0\,.$$

Qualunque sia n questa conica tocca la retta:

$$z=0$$

nel punto:

$$z=0\,,\quad l(b-c)\,x-m\,(c-a)\,y=0\,;$$

dunque è dimostrato il teorema:

Date due figure omografiche in un piano, se sopra una retta doppia si fissa un punto A *e per esso si conduce una retta* l, *le rette che congiungono i punti della retta* l *co' loro omologhi inviluppano una conica, che è inscritta nel triangolo formato dalle rette doppie. Tutte le coniche corrispondenti alle infinite rette che si ponno condurre per* A *si toccano in uno stesso punto, e la tangente comune è la retta doppia su cui è preso il punto* A.

Reciprocamente, *se le coniche corrispondenti a due rette si toccano, queste rette s'incontrano in un punto di una retta doppia, sulla quale ha luogo il contatto.*

Infatti siano le due rette:

$$lx+my+nz=0\,,\quad \mathrm{L}x+\mathrm{M}y+\mathrm{N}z=0$$

a cui corrisponderanno rispettivamente le coniche:

$$\sqrt{(l\,(b-c)\,x)}+\sqrt{(m\,(c-a)\,y)}+\sqrt{(n\,(a-b)\,z)}=0$$
$$\sqrt{(\mathrm{L}\,(b-c)\,x)}+\sqrt{(\mathrm{M}\,(c-a)\,y)}+\sqrt{(\mathrm{N}\,(a-b)\,z)}=0\,.$$

Siccome queste coniche sono entrambe inscritte nel triangolo formato dalle rette doppie, così se esse si toccano, ciò avrà luogo in un punto di una di queste rette medesime: sia per es. nella $z=0$. Siccome la retta $z=0$ tocca la prima conica nel punto:

$$l\,(b-c)\,x=m\,(c-a)\,y\,,\quad z=0$$

e la seconda conica nel punto:

$$\mathrm{L}\,(b-c)\,x=\mathrm{M}\,(c-a)\,y\,,\quad z=0$$

se questi punti coincidono, sarà:

$$\mathrm{L}=sl\,,\quad \mathrm{M}=sm$$

ossia le due rette date avranno per equazioni:

$$lx+my+nz=0\,,\quad lx+my+\frac{\mathrm{N}}{s}\,z=0$$

epperò esse si segano sulla:

$$z=0\,.$$

8.

Per agevolare la dimostrazione di un teorema che verrà esposto nel paragrafo nono, premetterò la soluzione del seguente problema [6]:

Dato un sistema di due figure omografiche poste in uno stesso piano, trovare le rette di una figura che colle loro omologhe sono divise ne' punti omologhi in parti proporzionali.

In questo paragrafo farò uso delle coordinate tangenziali. Siano:

$$x', \quad y', \quad z'$$

le coordinate tangenziali di una qualunque delle rette richieste; supposte riferite le due figure ai punti doppi:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

ed espresse con a, b, c delle indeterminate, le coordinate tangenziali della retta omologa di quella saranno:

$$ax', \quad by', \quad cz'.$$

Due punti qualunque della prima retta siano rappresentati dalle equazioni:

$$u + hv = 0, \quad u + kv = 0$$

ove:

$$u = \frac{y' - z'}{x'} x + \frac{z' - x'}{y'} y + \frac{x' - y'}{z'} z$$

$$v = (y' - z') x + (z' - x') y + (x' - y') z$$

ed h, k sono due indeterminate. La distanza fra i due punti sarà divisa in parti proporzionali a due numeri m, n dal punto:

$$u + iv = 0$$

ove:

$$i = \frac{mh + nk}{m + n}.$$

I punti omologhi a' precedenti sono:

$$\mathrm{U} + h\mathrm{V} = 0, \quad \mathrm{U} + k\mathrm{V} = 0, \quad \mathrm{U} + i\mathrm{V} = 0$$

ove:

$$\mathrm{U} = 0, \quad \mathrm{V} = 0$$

sono i punti omologhi rispettivi de' punti:

$$u = 0, \quad v = 0.$$

Affinchè il punto:

$$U + iV = 0$$

divida la distanza fra i due:

$$U + hV = 0, \quad U + kV = 0$$

in parti tali che stiano fra loro come $m : n$, deve aversi:

$$\frac{m(U + hV)}{A + hB} + \frac{n(U + kV)}{A + kB} = \frac{(m + n)(U + iV)}{A + iB}$$

ove A e B sono rispettivamente i risultati ottenuti col porre $x = y = z = 1$ nelle funzioni lineari U e V. Posto per i il suo valore, dopo alcune facili riduzioni, l'equazione precedente diviene:

$$B(BU - AV) = 0.$$

L'equazione:

$$B = 0$$

ossia la:

$$a(b - c)x' + b(c - a)y' + c(a - b)z' = 0$$

dà la soluzione richiesta. L'altra equazione:

$$BU - AV = 0$$

ossia la:

$$(cz' - by')x + (ax' - cz')y + (by' - ax')z = 0$$

dà:

$$ax' = by' = cz'$$

caso particolare della $B = 0$.

L'equazione $B = 0$ rappresenta un punto situato a distanza infinita. Dunque le rette richieste sono parallele alla:

$$ax' = by' = cz'$$

cioè a quella retta della prima figura che ha la sua omologa a distanza infinita.

Così è dimostrato il seguente teorema, reciproco di uno notissimo dell'illustre geometra CHASLES (*Traité de Géométrie Supérieure*, pag. 365):

In ciascuna figura le sole rette, che colle rispettive omologhe sono divise dai punti omologhi in parti proporzionali, sono le parallele a quella che ha la sua omologa nell'altra figura situata a distanza infinita.

9.

Ricerchiamo ora se fra le rette determinate nel paragrafo precedente, ve ne siano di quelle che colle rispettive omologhe siano divise in parti eguali dai punti omologhi. Riprese le coordinate trilineari, siano A, B, C gli angoli del triangolo formato dalle rette doppie:

$$x = 0\,, \quad y = 0\,, \quad z = 0\,;$$

saranno quindi:

$$\begin{aligned} &ax \operatorname{sen} A + by \operatorname{sen} B + cx \operatorname{sen} C = 0 \\ (15) \qquad &\frac{x}{a} \operatorname{sen} A + \frac{y}{b} \operatorname{sen} B + \frac{z}{c} \operatorname{sen} C = 0 \end{aligned}$$

le equazioni delle due rette che nelle due figure hanno le omologhe a distanza infinita. Sia poi LM, LN, una coppia qualunque di rette omologhe, rispettivamente parallele alle precedenti; le loro equazioni saranno della forma:

$$(a+s)\,x \operatorname{sen} A + (b+s)\,y \operatorname{sen} B + (c+s)\,z \operatorname{sen} C = 0$$

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{s}\right)x \operatorname{sen} A + \left(\frac{1}{b}+\frac{1}{s}\right)y \operatorname{sen} B + \left(\frac{1}{c}+\frac{1}{s}\right)z \operatorname{sen} C = 0$$

ove s è la quantità che individua la coppia delle rette omologhe.

Il punto L ad esse comune ha per coordinate:

$$x : y : z = \frac{a(b-c)}{(a+s)\operatorname{sen} A} : \frac{b(c-a)}{(b+s)\operatorname{sen} B} : \frac{c(a-b)}{(c+s)\operatorname{sen} C}:$$

considerato questo punto come appartenente alla prima retta avrà per omologo l'M determinato dalle:

$$x : y : z : = \frac{a^2(b-c)}{(a+s)\operatorname{sen} A} : \frac{b^2(c-a)}{(b+s)\operatorname{sen} B} : \frac{c^2(a-b)}{(c+s)\operatorname{sen} C}$$

e considerato come appartenente alla seconda retta avrà per omologo l'N determinato dalle:

$$x : y : z = \frac{b-c}{(a+s)\operatorname{sen} A} : \frac{c-a}{(b+s)\operatorname{sen} B} : \frac{a-b}{(c+s)\operatorname{sen} C}.$$

Quindi l'equazione della retta MN sarà:

$$(b+c)\,(a+s)\,x \operatorname{sen} A + (c+a)\,(b+s)\,y \operatorname{sen} B + (a+b)\,(c+s)\,z \operatorname{sen} C = 0.$$

Ora affinchè sia soddisfatta la condizione dell'attuale problema, è necessario e sufficiente che la retta MN riesca parallela ad una delle bisettrici degli angoli compresi dalle rette (15).

Il punto comune alle (15) è:

$$x : y : z = \frac{a(b^2 - c^2)}{\operatorname{sen} A} : \frac{b(c^2 - a^2)}{\operatorname{sen} B} : \frac{c(a^2 - b^2)}{\operatorname{sen} C}$$

e la parallela ad MN condotta per questo punto sarà:

$$(bc + as)\, x \operatorname{sen} A + (ca + bs)\, y \operatorname{sen} B + (ab + cs)\, z \operatorname{sen} C = 0 .$$

D'altra parte, posto:

$$h^2 = a^2 \operatorname{sen}^2 A + b^2 \operatorname{sen}^2 B + c^2 \operatorname{sen}^2 C - 2bc \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos A - 2ca \operatorname{sen} C \operatorname{sen} A \cos B - 2ab \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \cos C$$

$$k = \frac{1}{a^2} \operatorname{sen}^2 A + \frac{1}{b^2} \operatorname{sen}^2 B + \frac{1}{c^2} \operatorname{sen}^2 C - \frac{2}{bc} \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos A - \frac{2}{ca} \operatorname{sen} C \operatorname{sen} A \cos B - \frac{2}{ab} \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \cos C ,$$

le due bisettrici degli angoli compresi dalle rette (15) sono rappresentate dalla doppia equazione:

$$\frac{h \pm ka^2}{a}\, x \operatorname{sen} A + \frac{h \pm kb^2}{b}\, y \operatorname{sen} B + \frac{h \pm kc^2}{c}\, z \operatorname{sen} C = 0 .$$

Quindi indicata con i un'indeterminata, per condizione del problema dovrà essere:

$$a\,(bc + as) = i\,(h \pm ka^2)$$
$$b\,(ca + bs) = i\,(h \pm kb^2)$$
$$c\,(ab + cs) = i\,(h \pm kc^2)$$

da cui moltiplicando ordinatamente per $b - c$, $c - a$, $a - b$ e sommando si ha:

$$\pm\, ik = s$$

quindi, ciascuna delle precedenti dà:

$$hs = \pm\, k\, abc$$

cioè due valori per la s, epperò due sistemi di due rette omologhe divise in parti eguali dai loro punti omologhi. Siccome poi, per uno di questi sistemi la retta LM è parallela ad una delle bisettrici degli angoli delle rette (15), e per l'altro è parallela all'altra, così ne risulta evidentemente che se due punti descrivono *nello stesso senso* le due rette di una figura, i loro omologhi descriveranno *in senso contrario* le rette omologhe nell'altra figura.

Così è dimostrato il teorema:

In due figure omografiche poste in un piano esistono sempre due sistemi (e due soli) di due rette omologhe divise in parti eguali dai punti omologhi. Le due rette di ciascuna figura sono parallele alla retta di questa figura che ha l'omologa nell'altra a distanza infinita; e se due punti descrivono le due rette di una delle due figure nello stesso senso, i loro punti omologhi descriveranno le rette omologhe in senso contrario.

Cremona, 6 agosto 1857.