2.

INTORNO AD UN TEOREMA DI ABEL.

Annali di Scienze matematiche e fisiche compilati da B. TORTOLINI, tomo settimo (1856), pp. 99-105.

Il teorema del quale questa breve nota contiene una dimostrazione, venne enunciato per la prima volta da ABEL, in una lettera diretta a LEGENDRE *), e in seguito dimostrato dal signor BROCH **).

LEMMA 1.° Siano $a_0, a_1, \dots a_{n-1}$ n quantità qualsivogliano; α una radice primitiva dell'equazione $x^n - 1 = 0$; e

$$\theta_r = a_0 + a_1\alpha_r + a_2\alpha_r^2 \dots + a_{n-1}\alpha_r^{n-1}$$

supposto

$$\alpha_r = \alpha^r. \tag{1}$$

Si moltiplichino fra loro i due determinanti

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} \\ 1 & \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_{n-1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \alpha_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Eseguendo la moltiplicazione per linee, ed avendo riguardo alla (1), le colonne del

*) Crelle, Journal für die Mathematik, Band 6. [Oeuvres de N. H. Abel, nouv. edit., vol. II, p. 276].

**) Crelle, Journal für die Mathematik, Band 20.

determinante prodotto riescono ordinatamente divisibili per $\theta_n, \theta_1, \dots \theta_{n-1}$; e si ha

$$D\Delta = \theta_1\theta_2\dots\theta_n \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-1}^2 & \dots & \alpha_{n-1}^{n-1} \\ 1 & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-2}^2 & \dots & \alpha_{n-2}^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \end{vmatrix},$$

ma il determinante che entra nel secondo membro di questa equazione è evidentemente eguale a $(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\Delta$; dunque

$$\theta_1\theta_2\dots\theta_n = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} D. \quad [2]$$

Il teorema espresso in questa formola fu enunciato per la prima volta dal signor Spottiswoode *); la dimostrazione è del prof. Brioschi, mio valente maestro.

Lemma 2.° Si considerino le $a_0, a_1, \dots a_{n-1}$ come funzioni di una stessa variabile, derivando rispetto ad essa il determinante D, si ha

$$D' = D_1 + D_2 + \dots + D_n$$

ove D_r è il determinante che si ottiene dal determinante D, sostituendo agli elementi della r esima colonna le loro derivate. Nel determinante D_r dispongansi le linee $(n-r+2)$ esima, $(n-r+3)$ esima, ... n esima, prima, seconda, ... $(n-r+1)$ esima in modo che riescano ordinatamente prima, seconda, ... $(r-1)$ esima, r esima, $(r+1)$ esima, ... n esima; indi si dispongano le colonne r esima, $(r+1)$ esima, ... n esima, prima, seconda, ... $(r-1)$ esima per modo che divengano prima, seconda, ... $(n-r+1)$ esima, $(n-r+2)$ esima, $(n-r+3)$ esima, ... n esima; si avrà

$$D_r = D_1$$

dunque

$$D' = nD_1 = nD_2 = \dots = nD_n .$$

Lemma 3.° Sia

$$H = \begin{vmatrix} m_0 & q_0 & q_1 d & \dots & q_{n-2}d^{n-2} \\ m_1 d & q_1 d & q_2 d^2 & \dots & q_{n-1}d^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n-1}d^{n-1} & q_{n-1}d^{n-1} & q_0 & \dots & q_{n-3}d^{n-3} \end{vmatrix}.$$

* Crelle, Journal für die Mathematik, Band 51.

Si può dimostrare che l'espressione $\frac{\mathrm{H}}{d}$ è razionale [3] rispetto a d^n. Infatti, dopo aver divisa la seconda linea del determinante H per d, se si moltiplicano le colonne seconda, terza, ... ultima per $d^n, d^{n-1}, \ldots d^2$ e poi si dividono le linee terza, quarta,... ultima per $d^2, d^3, \ldots d^{n-1}$, si ottiene

$$\frac{\mathrm{H}}{d} = \frac{1}{d^n} \begin{vmatrix} m_1 & q_0 d^n & q_1 d^n & \ldots & q_{n-2} d^n \\ m_2 & q_1 d^n & q_2 d^n & \ldots & q_{n-1} d^n \\ m_2 & q_2 d^n & q_3 d^n & \ldots & q_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_{n-1} & q_{n-1} d^n & q_0 & \ldots & q_{n-3} \end{vmatrix}.$$

Teorema di Abel. Sia $\mathrm{F}(x) = 0$ l'equazione risultante dalla eliminazione della y fra le due equazioni algebriche

$$y^n - \mathrm{R}(x) = 0, \quad q_0 + q_1 y + q_2 y^2 + \ldots + q_{n-1} y^{n-1} = 0$$

ove $\mathrm{R}(x)$ sia una funzione razionale ed intera di x; $q_0, q_1, \ldots q_{n-1}$ n funzioni razionali ed intere della stessa x, nelle quali però i coefficienti delle potenze della variabile siano quantità indeterminate, supposte funzioni di un'arbitraria t. Siano $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ e n radici dell'equazione $x^n - 1 = 0$, e facciasi $d = \sqrt[n]{\mathrm{R}(x)}$. Pel lemma 1.° si ha

$$\mathrm{F}(x) = \begin{vmatrix} q_0 & q_1 d & q_2 d^2 & \ldots & q_{n-1} d^{n-1} \\ q_1 d & q_2 d^2 & q_3 d^3 & \ldots & q_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{n-1} d^{n-1} & q_0 & q_1 d & \ldots & q_{n-2} d^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Moltiplicando le linee seconda, terza,... ultima per $\alpha_r, \alpha_r^2, \ldots \alpha_r^{n-1}$, ed aggiungendo agli elementi della prima colonna quelli della seconda, della terza,... dell'ultima moltiplicati per $\alpha_r, \alpha_r^2, \ldots \alpha_r^{n-1}$, e moltiplicando quindi di nuovo le linee prima, seconda,... ultima per $\alpha_r^n, \alpha_r^{n-1}, \ldots \alpha_r$ si ha

$$(2) \qquad \mathrm{F}(x) = \theta_r \begin{vmatrix} \alpha_r^n & q_1 d & q_2 d^2 & \ldots & q_{n-1} d^{n-1} \\ \alpha_r^{n-1} & q_2 d^2 & q_3 d^3 & \ldots & q_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_r & q_0 & q_1 d & \ldots & q_{n-2} d^{n-2} \end{vmatrix}$$

posto

$$(3) \qquad \theta_r = q_0 + q_1 \alpha_r d + q_2 \alpha_r^2 d^2 + \ldots + q_{n-1} \alpha_r^{n-1} d^{n-1}.$$

Sia x una qualunque delle μ radici, supposte disuguali, dell'equazione $F(x) = 0$, e sia θ_r il fattore di $F(x)$ che è annullato da quella radice. Derivando rispetto a t la equazione identica $F(x) = 0$, si ha (lemma 2.°)

$$F'(x)\frac{dx}{dt} + n \begin{vmatrix} h_0 & q_1 d & q_2 d^2 & \ldots & q^{n-1} d^{n-1} \\ h_1 & q_2 d^2 & q_3 d^3 & \ldots & q_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{n-1} & q_0 & q_1 d & \ldots & q_{n-2} d^{n-2} \end{vmatrix} = 0$$

ove $h_s = \frac{dq_s}{dt} d^s$; $\frac{dq_s}{dt}$ indica la derivata di q_s rispetto alla sola t implicita ne' coefficienti. Trasformisi il determinante nell'equazione che precede, moltiplicando le linee seconda, terza, ... ultima per $\alpha_r, \alpha_r^2, \ldots \alpha_r^{n-1}$ ed aggiungendo agli elementi dell'ultima colonna moltiplicati per α_r^{n-1} quelli della penultima, terz'ultima, ... seconda moltiplicati per $\alpha_r^{n-2}, \alpha_r^{n-3}, \ldots \alpha_r$; avendo riguardo all'equazione identica $\theta_r = 0$, si ha

$$(4) \qquad F'(x)\frac{dx}{dt} - n\alpha_r H = 0$$

posto

$$H = (-1)^n \begin{vmatrix} h_0 & q_0 & q_1 d & \ldots & q_{n-2} d^{n-2} \\ h_1 & q_1 d & q_2 d^2 & \ldots & q_{n-1} d^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{n-1} & q_{n-1} d^{n-1} & q_0 & \ldots & q_{n-3} d^{n-3} \end{vmatrix}.$$

Sia a una quantità costante, $f(x)$ una funzione razionale ed intera di x; e si moltiplichi la (4) per

$$\frac{f(x)}{\alpha_r (x-a)\, d F'(x)},$$

si avrà

$$\frac{1}{\alpha_r} \frac{f(x)}{(x-a)\, d} \frac{dx}{dt} = \frac{n H f(x)}{(x-a)\, d\, F'(x)}.$$

In questa equazione cambio la x successivamente in tutte le radici della $F(x) = 0$; sommando i risultati ed osservando essere $\frac{H}{d}$ una funzione razionale [3] rispetto ad x

(lemma 3.°), si ha, per noti teoremi sullo spezzamento delle frazioni razionali

$$\sum_1^{\mu} \frac{1}{\alpha_r} \frac{f(x)}{(x-a)\,d(x)} \frac{dx}{dt} = \Pi \frac{n\,\mathrm{H}(x)\,f(x)}{(x-a)\,d(x)\,\mathrm{F}(x)} - \frac{n\,\mathrm{H}(a)\,f(a)}{d(a)\,\mathrm{F}(a)} \qquad [4]$$

indicando col simbolo $\Pi\varphi(x)$ il cofficiente di $\frac{1}{x}$ nello sviluppo di $\varphi(x)$ secondo le potenze discendenti di x. Quindi, integrando rispetto a t, si ha

$$(5) \qquad \sum_1^{\mu} \frac{1}{\alpha_r} \int \frac{f(x)}{(x-a)\,d(x)}\,dx = \Pi \frac{f(x)}{(x-a)\,d(x)} \int \frac{n\,\mathrm{H}(x)}{\mathrm{F}(x)}\,dt$$

$$- \frac{f(a)}{d(a)} \int \frac{n\,\mathrm{H}(a)}{\mathrm{F}(a)}\,dt + \text{Cost.}^{\text{e}}.$$

Ora derivinsi le n equazioni (3) rispetto alla sola t; poi si moltiplichino le equazioni ottenute dalla derivazione ordinatamente per

$$\alpha_1^n,\ \alpha_2^n, \ldots \alpha_n^n;\quad \alpha_1^{n-1},\ \alpha_2^{n-1}, \ldots \alpha_n^{n-1}; \ldots;\quad \alpha_1,\ \alpha_2, \ldots \alpha_n;$$

sommando ciascuna volta le risultanti si ha

$$nh_s = \alpha_1^{n-s} \frac{d\theta_1}{dt} + \alpha_2^{n-s} \frac{d\theta_2}{dt} + \ldots + \alpha_n^{n-s} \frac{d\theta_n}{dt};$$

quindi, essendo

$$\mathrm{H} = h_0 \frac{d\mathrm{H}}{dh_0} + h_1 \frac{d\mathrm{H}}{dh_1} + \ldots + h_{n-1} \frac{d\mathrm{H}}{dh_{n-1}},$$

sarà

$$n\mathrm{H} = (-1)^n \sum_1^n {}_r \frac{d\theta_r}{dt} \begin{vmatrix} \alpha_r^n & q_0 & q_1 d & \ldots & q_{n-2}\,d^{n-2} \\ \alpha_r^{n-1} & q_1 d & q_2 d^2 & \ldots & q_{n-1}\,d^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_r & q_{n-1}\,d^{n-1} & q_0 & \ldots & q_{n-3}\,d^{n-3} \end{vmatrix}$$

ovvero

$$n\mathrm{H} = -\sum_1^n {}_r\, \alpha_r^{n-1} \frac{d\theta_r}{dt} \begin{vmatrix} \alpha_r^n & q_1 d & q_2 d^2 & \ldots & q^{n-1}\,d^{n-1} \\ \alpha_r^{n-1} & q_2 d^2 & q_3 d^3 & \ldots & q_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_r & q_0 & q_1 d & \ldots & q_{n-2}\,d^{n-2} \end{vmatrix}$$

e per la (2)

$$\frac{n\,\mathrm{H}}{\mathrm{F}} = -\sum_1^n {}_r \frac{1}{\alpha_r}\frac{d\theta_r}{dt}\frac{1}{\theta_r},$$

quindi la (5) diviene

$$\sum_1^\mu \frac{1}{\alpha_r}\int \frac{f(x)}{(x-a)\sqrt[n]{\mathrm{R}(x)}}\,dx = -\,\Pi\,\frac{f(x)}{(x-a)\sqrt[n]{\mathrm{R}(x)}}\sum_1^n {}_r \frac{1}{\alpha_r}\log\theta_r(x)$$

$$+\frac{f(a)}{\sqrt[n]{\mathrm{R}(a)}}\sum_1^n \frac{1}{\alpha_r}\log\theta_r(a) + \text{Cost.}^{\text{e}}.$$

In questo risultato consiste appunto il teorema di Abel.

Pavia, 2 maggio 1856.