

## LUIGI CREMONA <sup>(1)</sup>

Nel novembre 1860 saliva la cattedra di Geometria Superiore istituita pochi mesi prima in questa Università dal dittatore Farini, LUIGI CREMONA, il padre della Geometria italiana moderna. Compieva egli allora i 30 anni, essendo nato in Pavia il 7 dicembre 1830. Noi festeggiamo oggi il centenario della sua nascita.

Risuoni ancora una volta in queste aule la parola ammonitrice con cui Egli dava principio al suo insegnamento:

« Giovani alunni, che v'accingete a seguirmi in questo corso di geometria moderna, non v'accostate che con saldo proposito di studi pertinaci. Senza una incrollabile costanza nella fatica non si giunge a possedere una scienza. Se questo nobile proposito è in voi, io vi dico che la scienza vi apparirà bella ed ammiranda, e voi l'amerete così fortemente che d'allora in poi gli studi intensi vi riusciranno una dolce necessità della vita. Me fortunato se potessi raggiungere lo splendido risultato d'invogliare questa generosa gioventù allo studio ed al culto di una grande scienza che ha già procacciata tanta gloria agli stranieri e che fra noi non ha che rarissimi e solitari cultori!

Respingete da voi, o giovani, le malevole parole di coloro che, a conforto della propria ignoranza o a sfogo di irosi pregiudizi vi chiederanno con ironico sorriso a che giovino questi ed altri studi,

---

(1) Commemorazione tenuta per designazione delle Autorità Accademiche dal Prof. Beppo Levi nell'Istituto Matematico « Salvatore Pincherle » nella ricorrenza del 1° centenario dalla nascita.

e vi parleranno dell' impotenza pratica di quegli uomini che si consacrano esclusivamente al progresso di una scienza prediletta. Quand' anche la geometria non rendesse, come rende, immediati servigi alle arti belle, all' industria, alla meccanica, all' astronomia, alla fisica; quand' anche un' esperienza secolare non ci ammonisse che le più astratte teorie matematiche sortono in tempo più o meno vicino applicazioni prima neppure sospettate; quand' anche non ci stesse innanzi al pensiero la storia di tanti illustri che, senza mai desistere dal coltivare la scienza pura, furono i più efficaci promotori della presente civiltà, ancora io vi direi: questa scienza è degna che voi l' amiate: tante sono e così sublimi le sue bellezze, ch' essa non può non esercitare sulle generose ed inlatte anime dei giovani un' alta influenza educativa, elevandole alla serena e inimitabile poesia della verità . . . . .

Nelle armi e nei militari esercizi rinvigorite il corpo; negli studi severi e costanti spogliate ogni ruggine di servitù e alla luce della scienza imparate ad essere degni di libertà. Se la voce della patria vi chiama al campo, e voi accorrete, pugnate, trionfate o cadete, certi sempre di vincere: le battaglie della nostra indipendenza non si perdono più. Ma se le armi posano, tornate agli studi, perocchè anche con questi servite e glorificate l' Italia ».

Tale fu veramente il Cremona così nel pensiero come nell' azione. Giovinetto di 17 anni era accorso volontario, nel 1848, in aiuto di Milano insorta e di lì aveva proseguito col battaglione degli studenti napoletani, combattendo a Nervesa, alla Piave, alla infelice difesa di Treviso; aveva partecipato alla difesa di Venezia segnalandosi per il suo coraggio.

Dopo 18 mesi di lotta, ricaduto il Lombardo-Veneto sotto il governo austriaco, era tornato alla sua Pavia, dove, compiuti gli studi liceali e poi quelli universitari, s'era laureato ingegnere civile ed architetto nel 1853. Un' affettuosa consuetudine col Brioschi, assai più che gl' insegnamenti ricevuti all' Università (allora tenuti in Italia, per le matematiche, ad un livello assai basso) l' aveva indirizzato alla ricerca geometrica, dalla quale non lo distoglievano le necessità della vita e le fatiche dell' insegnamento medio prima privato, poi pubblico. In pochi anni, mentre il valore e la sollecitudine dell' insegnante l' avevano condotto a una cattedra liceale a Milano, i suoi lavori geometrici l' avevano fatto conoscere come una delle migliori intelligenze matematiche della nuova Italia. Ma furono gli anni che egli passò a Bologna dal 1860 al '67 quelli in cui maggiormente si formò e rifulse la Sua personalità scientifica.

Nel tracciare il programma delle Sue lezioni in quel novembre 1860, il Cremona diceva: « Io m' avviso che scopo della istituzione di questa cattedra sia quello, non pur di sviluppare alcune serie di proprietà di curve e di superficie, ma sì anche d'ammaestrare l'italiana gioventù in quei meravigliosi metodi *puramente geometrici* che sinora non si esposero mai nelle nostre università, eppure sono una delle più belle glorie della scienza moderna. I metodi algoritmici vennero finora coltivati quasi esclusivamente... ». Questi metodi algoritmici — e cioè quelli della geometria analitica — erano in verità quelli che fino alla vigilia avevano servito alle sue proprie ricerche, e queste, dopo qualche breve saggio nel campo della geometria differenziale, s'erano volte allo studio delle proprietà di curve e superficie algebriche di 3° e di 4° grado: nel giovane autore avevano mostrato potenza investigatrice ed abile maneggio dello strumento analitico, ma non l'originalità di vedute ch'egli aveva nell'animo. Il programma delle lezioni era piuttosto un programma di lavoro ed un lieve rimpianto. Da poco egli aveva preso contatto coi metodi geometrici dello Steiner, del Chasles, del Moebius, « i grandi maestri, i quali — sono sue parole — hanno rinnovato i miracoli dei più famosi antichi, Euclide, Archimede, Apollonio » e quello era ormai il modello a cui l'opera sua doveva tendere. Allo Chasles egli scriveva: « La mia debolezza proviene soprattutto dalla mia educazione esclusivamente algebrica ». Ma il forte ingegno doveva ben presto aver ragione di tale debolezza.

Negli anni 1860-62 egli pubblicò varie ricerche di *pura geometria*, sopra le cubiche e sopra le quartiche, in parte riprendendo risultati già da lui ottenuti precedentemente coi metodi analitici; ma già alla fine del 1861 (il 19 dicembre) egli presentava alla nostra Accademia, per essere inserito nelle sue memorie, il primo di quei lavori d'insieme che dovevano rendere il suo nome familiare ed ammirato fra i geometri. Voglio dire la *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*, che, pubblicata nell'ottobre 1862 e seguita, dopo pochi anni, nel 1866-67, dai *Preliminari ad una teoria geometrica delle superficie*, con questa divenne presto classica; e furono tradotte in francese, in tedesco, in boemo. Lo scopo di questi lavori, quale risulta evidente dal titolo e quale è pure esplicitamente dichiarato dall'A., dovrebbe essere quello di costruire una teoria sintetica delle curve e delle superficie algebriche: ma in verità l'esecuzione di un tale programma nell'esatto significato delle parole, non è nemmeno tentata dal Cremona, poichè invano si cercherebbe in questi lavori una definizione *geometrica* dell'oggetto da studiarci (delle varietà algebriche cioè) che possa assomigliarsi,

ad es. ad una qualunque delle definizioni delle coniche — sezioni del cono retto, luoghi dei punti a rapporto costante delle distanze da un punto e da una retta, ecc. — che ci furon tramaudate dagli antichi, che eran note prima che nascessero l'algebra e la geometria analitica e prima quindi che potesse pur formarsi la nozione di « varietà algebriche »: nel caso particolare, quadratiche; e nemmeno una definizione che possa assomigliarsi a quelle che delle stesse varietà quadratiche ci dà la geometria proiettiva. Non già che la generazione delle curve algebriche per intersezione delle curve corrispondenti di due fasci proiettivi di ordine minore fosse ignota al Cremona, che anzi essa occupa un intero capitolo della sua « Introduzione »; ma essa vi occupa lo stesso posto, press' a poco, che le competerebbe in una teoria algebrica delle curve; non quello di definizione, ma sì quello di teorema. Tale definizione, che fu tentata in tempi più recenti dal Koetter e dal De Paolis, mostrandosi nel fatto troppo laboriosa per superare l'intrinseco interesse del problema per se stesso, non pare abbia preoccupato il Cremona. Nella geometria Egli vedeva essenzialmente la eleganza e la sintetica intuibilità della deduzione, l'organamento dei fatti nelle loro mutue dipendenze senza l'intervento di elementi estrinseci ad essi (e fu invero egli stesso, in altro argomento, uno dei primi estimatori dei metodi di geometria intrinseca del Grassmann): perciò pel Cremona l'algebricità è presupposta — sebbene talvolta forse non abbastanza esplicitamente quanto vorrebbe la nostra attuale esigenza di rigore; e dall'algebra sono presi e postulati — quantunque non colla generalità e precisione che si cercò in seguito — i principii fondamentali, di corrispondenza e di conservazione del numero: fungono essi nella costruzione Cremoniana allo stesso modo come i postulati geometrici nella costruzione euclidea: e l'ingegnosità e l'eleganza con cui essi sono sfruttati principalmente mediante l'ausilio della teoria della polarità (vorrei citare ad es. taluni conteggi di costanti, come ad es. la determinazione del numero dei punti da cui dipende una curva d'ordine  $n$ ) fanno dell'opera del Cremona un edificio ammirevole ed ammirato.

Nel 1863 l'attenzione del Cremona era attratta sopra un altro argomento che nella teoria delle varietà algebriche si mostrò in seguito di tale importanza da assicurare da solo al nome del Cremona un posto notevole nella storia della geometria; si tratta delle trasformazioni birazionali degli spazi lineari — per il Cremona precisamente del piano e dello spazio ordinario — che noi ora chiamiamo abitualmente *trasformazioni cremoniane*. Sono quelle corrispondenze algebriche per le quali a ciascun punto determinato

del piano o dello spazio corrisponde in generale un punto parimenti ben determinato. Esempi particolari di tali corrispondenze erano noti da tempo, e in primo luogo le trasformazioni proiettive; ma il notevole era che, mentre quando si tratta delle corrispondenze fra punti della retta, questo esempio era anche l'unico possibile, la varietà dei casi possibili è ben altrimenti infinita nel caso di più di una dimensione. Che le cose non potessero andare allo stesso modo nel caso di una e di più dimensioni era pur noto, perchè una trasformazione del genere, non proiettiva, era nota fin dalla geometria elementare: quella che chiamiamo trasformazione per raggi vettori reciproci; recentemente poi il Magnus e lo Schiaparelli avevano generalizzato questo esempio in quella trasformazione che si chiamò trasformazione quadratica. Ma l'ampio sviluppo di teoria che intorno a questo problema poteva nascere era del tutto inaspettato; che anzi lo Schiaparelli aveva erroneamente potuto credere di avere, col suo studio, considerata la più generale trasformazione birazionale. È pur vero che il De Jonquière aveva già fornito un altro esempio assai più generale rimasto però inosservato ai geometri italiani: ma fu il Cremona a porsi il problema in tutta la sua generalità e a darvi soluzione a cui, per il caso del piano, ben poco è rimasto da aggiungere: principalmente perciò che il Cremona non si è limitato al problema geometrico relativo alla esistenza delle trasformazioni, ma ha veduto l'interesse che si connette agli elementi eccezionali di essa per cui cessa la univocità della corrispondenza. Meno completa invece la trattazione per quanto riguarda lo spazio; nella quale il Cremona ci dà un procedimento geometricamente ingegnoso per generare una serie infinita di trasformazioni, e fa lo studio completo di molti casi particolari; ma non riesce ad una trattazione generale, la quale presentava difficoltà tuttora non superate. Le trasformazioni Cremoniane si sono mostrate tosto strumento essenziale d'indagine geometrica.

Da Bologna il Cremona passò al Politecnico di Milano, ad insegnarvi Statica Grafica e Geometria superiore: è di questo periodo l'opuscolo *Le figure reciproche nella statica grafica*, nel quale, riat-taccandosi alle nozioni introdotte precedentemente dal Maxwell e dal Culmann per il calcolo degli sforzi nelle travature reticolari, ne semplifica l'interpretazione geometrica ed i procedimenti grafici. Quest'opera, piccola di mole, divenne presto classica, così da fare annoverare il Cremona fra i fondatori della Statica Grafica. Nel 1879 essa raggiungeva la terza edizione italiana, nel 1873 ne era pubblicata a Vienna una traduzione tedesca, nell'85 a Parigi dal Gauthier-Villars una traduzione francese, nel '90 a Oxford una tra-

duzione inglese. Il Cremona, nella prefazione dell'edizione francese, si rallegrava di questo successo per aver contribuito a confermare ciò che il Culmann aveva proclamato, essere la geometria proiettiva elemento essenziale e possente per lo sviluppo dell'arte dell'ingegnere.

Questo amore, possiamo dire appassionato, per la geometria proiettiva è caratteristico nel Cremona. È in verità un programma di geometria proiettiva quello del suo primo corso di geometria superiore: ne questo possa essere interpretato come una più bassa estimazione per i corsi di geometria superiore del nostro: occorre notare che, come egli stesso ci dice, ogni insegnamento geometrico era fin' allora mancato nelle università italiane, o si era ridotto a un pratico insegnamento di geometria descrittiva. Ed è al Cremona medesimo che dobbiamo se la geometria proiettiva ha potuto discendere dal grado di « geometria superiore » a quello apparentemente più umile di materia propedeutica, preparando così gli allievi ingegneri a quelle applicazioni alla statica di cui or ora ho parlato, ed anche, ciò che forse più importa, elevandoli ad ammirare e a gustare qualche spirituale bellezza disinteressata che si insinua spontaneamente in mezzo agli argomenti di natura professionale. È invero sotto l'influenza del Cremona che l'insegnamento della geometria proiettiva si introdusse dapprima (nel 1871) negli istituti tecnici, poi (nel 1876) nei primi bienni dell'Università. Per gli Istituti tecnici egli scrisse pure un libretto che potesse servire di testo.

Oggi noi, premuti forse da altre necessità pratiche e spirituali, abbiamo ripercorsa in buona parte la via contraria — e permettetemi che come discepolo non, ma come pronipote forse — ultimo per valore — di quel padre, io non taccia un certo intimo rammarico! Negli istituti tecnici l'insegnamento della geometria proiettiva cadde ben presto, vivente e consenziente il Cremona, ed era certo prematuro; era prematuro principalmente perchè non era possibile far posto alle nozioni nuove senza il sacrificio di altre ed in primo luogo di qualche parte di quella geometria elementare euclidea che è pur sempre l'inimitabile monumento di dottrina matematica. Ma, ansiosi di adattarci a supposte impazienze dei giovani, ai quali sarebbe grave un insegnamento cui non fosse possibile una immediata risposta alla domanda « a che serve? » — necessitati anche di far posto ad argomenti nuovi che preludono ai nuovi sviluppi della fisica e della meccanica, abbiamo costretto anche nelle Università la geometria proiettiva a sedersi, un po' tollerata, quasi sul margine di un posto assegnato qui alla geometria descrittiva, là alla geometria analitica. L'insegnamento è rimasto, per quanto può



essere utile o necessario, ma diminuita, io penso, molta di quella armonia e di quella austerità per cui il Cremona vedeva nella nuova geometria la più genuina prosecuzione della geometria euclidea.

Perchè la caratteristica dominante del genio del Cremona fu, come già dissi, l'amore e l'ammirazione per la bellezza, il rigore, l'immediata intuizione del ragionamento geometrico puro. Già nel 1860, prendendo occasione dalla pubblicazione di una traduzione della Geometria elementare dell'Amiot (che, adottata dopo allora e per molti anni, negli istituti tecnici, formò ancora, principalmente per le note del traduttore una gioia spirituale per molti alunni della mia generazione) il nostro avea pubblicato sul « Politecnico » un lungo articolo di *Considerazioni sulla storia della geometria* nel quale egli si scagliava contro i molti libercoli che, col pretesto di dare alla geometria un assetto più facile e più pratico, avevano deturpato l'edificio logico euclideo. E fu l'adozione delle conclusioni di una commissione nominata nel 1867 di cui faceva parte il Cremona che riportò nelle scuole classiche italiane l'insegnamento della geometria secondo Euclide: secondo lo spirito di Euclide, e non, insiste Egli medesimo altrove, studiando a memoria Euclide come si farebbe della Bibbia e come pare si facesse allora in qualche scuola inglese! E per lo meno per questo riguardo possiamo ora dire che tutti siamo un poco figli del Cremona.

Nel 1873 il Cremona, cedendo alle insistenze del ministro Scialoja, passò dal Politecnico di Milano alla R. Scuola degli Ingegneri di Roma, per assumerne, insieme coll'insegnamento della Statica Grafica, anche la direzione. Da questo momento, anche per l'indebolirsi delle sue condizioni di salute, declina la sua attività di pubblicazioni scientifiche, ma, quasi a impersonare completamente il quadro dell'uomo di scienza ch'egli avea tracciato nella prolusione del 1860, si svolge e prende il sopravvento quella pratica di studioso amministratore della cosa pubblica. Riordinò e portò al suo massimo fiore la Scuola degli Ingegneri di Roma, riordinò la biblioteca Vittorio Emanuele, presiedette le Commissioni d'inchiesta sulle costruzioni governative di Roma e sui muraglioni del Tevere. Nominato senatore nel 1879, divenne uno dei più attivi ed autorevoli membri della Camera vitalizia, occupandosi principalmente delle cose della pubblica istruzione e della finanza, per la quale ultima appartenne alla Commissione permanente. Per molti anni fu membro del Consiglio superiore della P. I. e di questo, come del Senato, fu anche vice-presidente.

Gli scritti del Cremona si distinguono per la lucidità dell'esposizione e spesso anche per l'eleganza della forma; le lezioni, ci dice

il Bertini, uno de' suoi discepoli, onore della cattedra di geometria di Pisa e ai cui floridi 84 anni mandiamo un saluto riverente, le sue lezioni erano esempio di chiarezza, di precisione, di arte nel presentare cose difficili in forma piana e semplice. Ebbe carteggio amichevole con molti matematici stranieri ed in tutte le nazioni la sua morte fu considerata come un lutto per la scienza.

Onoriamo Lui che col braccio e coll' intelletto potè contribuire alla grandezza della Patria.