A. Brigaglia, *Luigi Cremona e la nuova scuola della nuova Italia: dagli obiettivi ai contenuti e alla loro valutazione*, in *XXV Convegno Nazionale UMI-CIIM sull'insegnamento della matematica "Valutare in matematica",* Siena, 27-29 Ottobre 2005, a cura di G. Anichini e M. D'Aprile, NUMI - Novembre 2006, e. XXIII n.11/b, pp. 31-40

LUIGI CREMONA E LA NUOVA SCUOLA DELLA NUOVA ITALIA: DAGLI OBIETTIVI AI CONTENUTI E ALLA LORO VALUTAZIONE

Aldo Brigaglia
(Dipartimento di Matematica, Università di Palermo)

Anche se il linguaggio è profondamente cambiato, obiettivi, competenze, metodi dell'insegnamento della matematica sono stati discussi su tematiche simili nel corso del tempo.
Recuperare il filo di una lunga tradizione può forse servire per evitare, come è stato detto, di dover sempre iniziare come se fosse l'anno 0. Questo contributo vuole collegare alcune problematiche attuali con quelle presenti nel ventennio 1860 – 1880, cruciale per la formazione dello stato unitario.
Il giovane allievo di Brioschi, sposato e con famiglia, bassino e calvo. Questa la schematica descrizione del ventottenne Cremona data dal matematico inglese Thomas Hirst, di passaggio dalla Lombardia, *seguendo gli eserciti vittoriosi di Francia e Piemonte attraverso le pianure della Lombardia e le raggiunse a SanMartino e a Solferino prima che quei sanguinosi campi di battaglia fossero sgombrati dai loro morti.*
La schematica descrizione è comunque efficace: Cremona (nato nel dicembre 1830) nel 1859 era un insegnante al Liceo di Cremona, era stato uno degli allievi prediletti di Francesco Brioschi, era sposato con Elisa Ferrari e aveva una figlia, Elena. Notiamo di passaggio che proprio l'avere famiglia gli aveva impedito di continuare la carriera universitaria come assistente di Brioschi.
Il gruppo di matematici che si era formato in Italia, principalmente nelle università di Pavia e di Pisa, era di primissimo ordine e stava preparando un vero e proprio boom per la ricerca scientifica della neonata nazione.
Di questo gruppo facevano parte Betti (1823-1892) a Pisa, Brioschi(1824-1897) a Pavia, Cremona, ma anche … Casorati (1835-1890) a Pavia, Beltrami (1835-1900) a Pavia, Battaglini (1826-1894) a Napoli, e più tardi Pincherle (1853-1936), Ascoli (1843-1896), Bertini (1846-1933), Bianchi (1856-1928), Volterra (1860-1940), Peano (1858-1932), Ricci (1853-1925), Veronese (1854-1917), Segre (1863-1924), Castelnuovo (1865-1952), Enriques (1871-1946), Levi Civita (1873-1941), Severi (1879-1961), ….
Le parole d'ordine che accomunano i componenti di questo gruppo possono essere riassunte in: Modernità e Internazionalità.
Io mi soffermerò sulla figura di Luigi Cremona.
I piani di lettura entro i quali vedere l'avventura intellettuale di questo giovane è plurimo: Il piano storico – in quanto egli fa parte integrante della storia culturale, ma anche politica, del nostro paese; il piano biografico – in quanto la sua vita ci insegna molto su come si forma un gruppo di ricerca coeso e di statura internazionale; il piano della ricerca matematica – in quanto egli ha dato contributi fondamentali allo sviluppo della geometria algebrica intorno alla metà del XIX secolo; il piano della didattica matematica – in quanto le sue idee hanno avuto un'influenza determinante sull'insegnamento della matematica nella scuola italiana.
Inizio da brevi riferimenti biografici, che possono mostrare quanto la sua formazione sia intessuta dagli ideali risorgimentali.
Una buona parte della prima gioventù la trascorre presso la sorella (di madre diversa) Giovanna a Gropello (ora Gropello Cairoli). Lì diviene amico dei fratelli Cairoli tutti

ferventi garibaldini: Benedetto (nato nel 1825, futuro primo ministro), Ernesto (nato nel 1832 e morto nel 1859, combattente con Garibaldi nella battaglia di Varese), Luigi (nato nel 1838 e morto nel 1860, durante la spedizione dei mille. Luigi era stato studente di matematica a Pavia con Brioschi), Enrico (nato nel 1840 e morto nel 1867 a Villa Glori), Giovanni (nato nel 1842 e morto nel 1869 in seguito alle ferite riportate a Villa Glori). Un'atmosfera che vedeva in Garibaldi il centro del movimento nazionale.

Nel 1848 – 49 molti del gruppo dei matematici partecipa alle lotte rivoluzionarie:

Cremona partecipa alla difesa di Venezia, Betti alla battaglia di Curtatone sotto il comando del suo professore, Mossoti.

A Venezia Cremona conosce il giovane Nicola Ferrari, stretto collaboratore di Mazzini; nel 1854 sposa la sorella di Nicola, Elisa. Per dare un'idea dei legami tra la famiglia Ferrari Mazzini basti dire che nel 1852 lo zio di Elisa, Napoleone Ferrari, diviene esecutore testamentario della madre di Mazzini; alla sua morte le carte di Mazzini passano alla famiglia Cremona (legato Itala Cremona, istituto mazziniano, Genova).

Nel 1855, alla morte di Nicola, la giovane coppia Cremona ricevette una lettera di pugno di Mazzini (lettera poi passata alla letteratura con il nome di *Lettera sull'immortalità dell'anima*), di cui riporto l'incipit:

Alla sorella di Nicola Ferrari

Signora, rassegnatevi, consolatevi. Io non vi vidi mai; ma so che amavate teneramente il fratello, e so ch'ei v'amava di profondo amore. Son certo ch'ei vi parlava di me, della fiducia ch'io poneva in lui e del santo affetto che legava l'anime nostre nell'adorazione d'uno stesso ideale, nel culto dell'Italia avvenire. E vi scrivo come a sorella, a darvi, lamentando insieme e parlando di lui, quel conforto che per me si può. Io non credo nella morte. Credo nella vita.

Ho citato queste poche righe per cercare di trasmettere l'emozione che sulla giovane coppia può avere destato la lettura di queste righe in un momento nel quale gli ideali risorgimentali prevalevano anche sugli interessi scientifici. In ogni caso vanno tenuti presenti gli strettissimi legami, familiari e di amicizia, di Cremona con due delle famiglie più impegnate sia sul fronte garibaldino che su quello mazziniano.

Comunque, è proprio a partire dalla metà degli anni '50 che, in modo concorde anche se indipendentemente l'uno dall'altro, questi giovani decidono che il contributo principale che essi possono dare alla patria è quello di svilupparne la ricerca scientifica e, come è – o meglio come dovrebbe essere – naturale ciò può avvenire solo attraverso la scuola.

Il primo ad agire in questo senso è Enrico Betti, che a Firenze, insieme a Giovanni Novi, si fa protagonista di una grande impresa, la traduzione di alcuni testi scolastici francesi in italiano. Do qui di seguito le date e i titoli delle pubblicazioni, cercando di farne apprezzare la natura di progetto organico:

Agosto 1856: J. Bertrand, *Aritmetica*, trad. Novi; ottobre 1856: J. Bertrand, *Trattato di Algebra Elementare*, trad Betti; J. Serret, *Trattato di Trigonometria*, trad. Ferrucci; 1857: Novi, *Elementi di Aritmetica*; 1858: E. Amiot, *Trattato di Geometria Elementare*, trad. Novi.

Contemporaneamente il gruppo agisce anche sul piano scientifico attraverso:

- Un viaggio scientifico in Germania e Francia (Betti, Brioschi, Casorati).
- La riorganizzazione degli Annali di matematica, principale rivista matematica italiana-
- Lo sviluppo di ricerche in vari campi della matematica, tutti di avaguardia

(algebra e fisica matematica – Betti, che tra l'altro si occupa della teoria di Galois; geometria algebrica – Cremona; determinanti e invarianti – Brioschi, che tra l'altro scopre la risoluzione delle equazioni di sesto grado attraverso funzioni iperelleittiche; analisi – Casorati, che diffonde le idee di Weierstrass prima e di Riemann dopo).
Su questi temi rinvio al bel libro di Umberto Bottazzini, *Va' pensiero*, ed. Il Mulino.
Tornando a agli indirizzi didattici perseguiti dal gruppo, vorrei schematicamente indicare alcune parole chiave per interpretare il loro pensiero. Esse sono: immaginazione (certo disciplinata dal rigore); rapporto con la ricerca; contribuire allo sviluppo dell'industria nazionale e quindi relazioni (complesse) con le applicazioni; contribuire all'unificazione della scuola del paese (unificazione di contenuti, di metodi, di linguaggi).
Così leggiamo nella Prefazione di Betti alla traduzione dell'Amiot, a proposito dei legami tra insegnamento e ricerca:
In niuna parte delle matematiche apparisce di più cotesto inconveniente quanto nella Geometria pura; e basta por mente ai mirabili progressi in questa scienza operati nell'ultimo scorcio di tempo, per consentire con noi che i trattati più riputati manchino affatto di quelle dottrine che si sono trovate più fruttuose nella Geometria moderna; talché con ragione può dirsi che essi preparino i giovani più allo studio delle Collezioni Matematiche di Pappo che a quello delle opere di Chasles, Möbius, Poncelet, Steiner, ecc.
Le cagioni del grave divario che corre tra le opere di Geometria elementare e lo stato attuale di questa scienza, sono diverse e di varia natura; talune generali ad ogni maniera di scienza, altre peculiari alla Geometria. Le prime ripetono la loro origine dal potere che ha sulla maggior parte degli animi umani l'abitudine, e dall'opinione volgare seguita da molti che la scienza debba servire esclusivamente alla pratica; opinione onninamente falsa e che ove prevalesse annullerebbe ogni progresso.
La trasformazione delle figure è uno dei più fecondi mezzi d'investigazione geometrica. Ma le novelle teoriche sono per avventura difficili e complicate per modo che oltrepassino i limiti di un insegnamento elementare? Sono inutili per la pratica? Sono inutili per le parti superiori delle matematiche? Le nozioni fondamentali sul rapporto anarmonico, sulla involuzione, sulle divisioni omografiche ..., diremo senza tema di essere smentiti da chi le ha studiate, che sono più facili di molte parti della Geometria solida. I nuovi metodi prestandosi con grande facilità e generalità alla soluzione dei problemi geometrici, giovano per questo lato alle applicazioni della scienza.
Se mi si permette una divagazione poetica, l'atmosfera che Betti voleva creare nella scuola è quella descritta tanto bene da Stendhal:
Il mio entusiasmo per la matematica aveva origine forse dal mio orrore per l'ipocrisia.
Alla terza o quarta lezione passammo alle equazioni di terzo grado e a quel punto Gros ci disse cose completamente nuove. Mi sembra che ci abbia trasportato di colpo alle porte della scienza o davanti al velo che bisognava sollevare.
Provavo un piacere intenso, analogo a quello della lettura di un romanzo appassionante.
...
Ero allora come un grande fiume che va a gettarsi in una cascata, come il Reno sopra Sciaffusa dove il suo corso è ancora tranquillo ma sta per gettarsi in un'immensa cascata. La mia cascata fu l'amore per la matematica.
È proprio questo a cui si riferisce Betti: portare (certo in forme non facili) gli allievi almeno a percepire il *velo che bisogna sollevare* è la via per comunicare la matematica.
Luigi Cremona fu profondamente impressionato dal progetto didattico di Betti e nel

1859, ancora insegnante nel liceo di Cremona, si accinse a scrivere una lunga recensione, nella quale per la prima volta esprime le sue idee didattiche, le *Considerazioni di Storia della Geometria in occasione di un libro di geometria elementare pubblicato a Firenze*.
Non vorrei qui ripetere troppe considerazioni generali, penso che il riportare qualche esempio delle attività proposte da Cremona alla luce della lettura del testo di Amiot possa chiarire più della teoria. Il primo esempio riguarda i poligoni stellati. Uso le parole stesse di Cremona:
Divisa una circonferenza in n parti uguali, se uniamo i punti di divisione, a cominciare da uno di essi, di 2 in 2, di 3 in 3, e in generale di h in h, si forma un poligono regolare di n lati, quando i numeri n ed h siano primi tra di loro. Il numero h costituisce la specie del poligono. Vi ha tanti poligoni regolari di n lati, quante unità vi sono nella metà del numero che esprime quanti numeri interi vi sono inferiori ad n e primi con esso. La somma degli angoli interni, formati dai lati successivi di un poligono regolare di n lati, è uguale a 2(n-2h) retti. Questi teoremi sono i fondamentali nella teorica dei poligoni stellati.
Il secondo esempio riguarda il metodo delle trasformazioni (si ricordi che siamo nel 1859, tredici anni prima della pubblicazione del programma di Erlangen di Klein):
Ora ci conviene dare un'idea della deformazione e della trasformazione delle figure piane. Imaginiamo che in un piano vi sia un punto che movendosi in modo affatto arbitrario descriva una certa figura. Nello stesso piano o in un altro imaginiamo un secondo punto mobile, il cui movimento sia collegato dietro una legge individuata al movimento del primo punto; nella qual legge entri la condizione che a ciascuna posizione di uno dei punti mobili corrisponda un'unica posizione dell'altro mobile, e reciprocamente. Il secondo mobile avrà così descritto una seconda figura, la quale del resto può, prescindendo da idee di movimento, anche desumersi dalla prima, supposta data, mediante un metodo di deformazione, che tenga luogo di quella legge determinata che legava i due movimenti.
Poligoni stellati, trasformazioni. Come si vede si tratta di una scelta di temi che ancora oggi sono considerati innovativi. Temi (in particolare il secondo) che pongono la didattica a stretto contatto con la ricerca dell'epoca, temi che fanno della matematica uno strumento non solo di sviluppo delle facoltà razionali dell'uomo, ma anche di quelle relative alla fantasia e all'immaginazione, come detto sopra.
Mi sembra anche interessante comprendere bene in quali circostanze sia venuto alla luce questa recensione. Il testo porta in calce: Cremona, 28 marzo 1859; l'8 giugno Vittorio Emanuele sarebbe entrato trionfalmente in Milano. Nata in una scuola dell'impero asburgico, la recensione sarebbe stata pubblicata un anno dopo, nel più battagliero dei giornali milanesi, *Il Politecnico* di Carlo Cattaneo. Anche la data di invio alla rivista è significativa: il 9 maggio 1860, due giorni prima dello sbarco a Marsala!
Questo succedersi di date può far meglio comprendere la nota aggiunta da Cremona all'articolo apparso nella rivista di Cattaneo:
Ora che il giogo straniero non ci sta più sul collo a imporci gli scelleratissimi testi di Moznik, Toffoli, ecc., che per più anni hanno inondato le nostre scuole e le avrebbero del tutto imbarbarite se tutt'i maestri fossero stati docili a servire gl'interessi della ditta Gerold – ora sarebbe omai tempo di gettare al fuoco anche certi libracci di matematica che tuttora si adoperano in qualche liceo e che fanno un terribile atto d'accusa contro chi li ha adottati. Diciamolo francamente: noi non abbiamo buoni libri elementari che siano originali italiani e giungano al livello de' progressi odierni della scienza. Forse ne

hanno i napoletani che furono sempre e sono egregi cultori delle matematiche; ma come può aversene certa notizia se quel paese è più diviso da noi che se fosse la China? I migliori libri, anzi gli unici veramente buoni che un coscienzioso maestrodi matematica elementare possa adottare nel suo insegnamento, sono i trattati di Bertrand, Amiot e Serret, così bene tradotti e ampliati da quei valenti toscani. I miei amici si ricorderanno che io non cominciato oggi ad inculcare l'uso di quelle eccellenti opere.

Come si vede, Cremona non potrebbe essere più esplicito nel sostegno al programma di svecchiamento dell'insegnamento di Betti. Per meglio comprendere l'atteggiamento di Cremona, riporto una pagina dal testo del Toffoli:

Problema I.

Di quanti metri quadrati è l' area dell'esagono regolare, il cui lato è di metri 3.20 ?

Soluzione

Essendo in generale (3.18)

$$\text{altezza} = \frac{\text{lato}}{2} \times 1.732\,,$$

$$\text{è apotema} = 1.6 \times 1.\ 1.732 = 2{,}771.$$

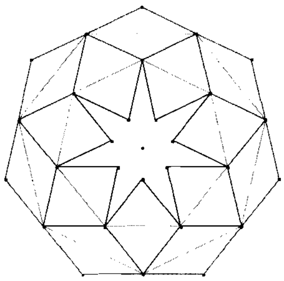
$$\begin{array}{rr}
\text{lato Met.} & 3.2 \\
\text{numero} & 6 \\
\hline
\text{perimetro Met.} & 19.2 \\
\tfrac{1}{2}\ \text{Met.} & 9{,}5 \\
\text{apotema}\ \text{»} & 2.771 \\
\hline
 & 16626 \\
 & 24939 \\
\hline
\text{area Met.} & 26{,}6016
\end{array}$$

R. E' di metri quadrati 26.60 circa.

Come si vede un problema puramente calcolativo e mnemonico, pieno di "numeri fissi" e simili strumenti. Si può utilmente confrontare questa impostazione con quella di Cremona per capire perché egli definisse "scelleratissimo" questo testo. Do solo due altri esempi:
Scrive Cremona:

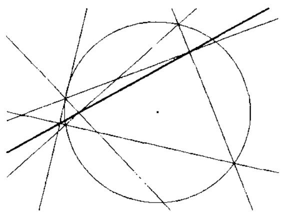
Prendiamo ... un ettagono regolare ordinario e dividiamone per metà tutti i lati. Intorno a ciascuna retta congiungente due punti medi consecutivi si faccia ruotare il piccolo triangolo che questa retta stacca dall'ettagono, finché questo triangolo cada all'interno della figura. Si otterrà così un poligono di quattordici lati ad angoli salienti e rientranti alternativamente, il quale ha lo stesso perimetro dell'ettagono proposto.

Ora intorno a ciascuna retta congiungente due vertici di angoli rientranti successivi del poligono di quattordici lati, si faccia rotare il piccolo triangolo da essa distaccato, finché cada entro alla figura; risulterà un altro poligono di quattordici lati ad angoli alternativamente salienti e rientranti, isoperimetro ai due precedenti.



Questi tre poligoni, isoperimetri tra loro, hanno però aree diverse, poiché il secondo è compreso dentro il primo e il terzo dentro il secondo. Le due figure così generate non sono altro che ettagoni di seconda e terza specie, nei quali siano stati levate le porzioni interne dei lati.

Un altro bel problema che può dare un'idea e quello di Servois: dimostrare che i piedi delle perpendicolari ai tre lati di un triangolo da un punto della circonferenza ad esso circoscritta sono allineati.



Vale tra l'altro la pena sottolineare come una simile impostazione si trasferisca, direi quasi "naturalmente" allo studio della geometria tramite software cosiddetti dinamici. Questo continuo appello all'intuizione (si veda l'uso della parola "immaginiamo") ben si sposa con altri dati della biografia di Cremona che era tra l'altro fratello di Tranquillo (1837-1874), il maggior pittore della scapigliatura lombarda.

Si può osservare come il progetto didattico di Cremona si legasse strettamente a quello scientifico. Così lo studio cremoniano delle curve e delle superfici prosegue l'evoluzione già avvenuta all'inizio del XIX secolo dallo studio delle singole curve (euclidee e affini), alle classi di uguale grado (coniche, cubiche – classificazione proiettiva); il passo successivo, compiuto soprattutto da Riemann, e completato proprio da Cremona, Clebsch, Noether vede il passggio alla classificazione per genere; sono proprio le trasformazioni cremoniane (o birazionali) a giocare il ruolo decisivo per questa classificazione: ancora una volta il concetto di trasformazione è decisivo; non è da stupirsi che Cremona abbia subito apprezzato l'opera del giovane Felix Klein.

Tornando al ruolo del matematico lombardo nell'edificazione della politica scolastica del nuovo stato, possiamo subito notare che tale ruolo si manifesta subito, sin dalla prima estensione dei programmi delle scuole del nuovo regno. Così Angelo Genocchi gli scriveva nel 1860: *Sono usciti nella gazzetta ufficiale anche i programmi d'algebra, geometria e trigonometria che sono i vostri né più né meno.*

Ma quali erano le innovazioni di questi programmi? Si possono immaginare, riguardano

principalmente lo studio del rapporto armonico, delle coniche, della polarità e la costruzione dei poliedri regolari, secondo le linee indicate prima.
Non mi sembra inutile riferire il progetto espresso da Cremona a quanto in quegli anni propugnato da Carlo Cattaneo, il più illustre dei politici milanesi, nella cui rivista Il giovane insegnante pubblicherà più volte articoli di carattere generale. Scriveva Cattaneo nel 1860:
Tutto il sistema scolastico dal quale usciamo era ordinato a un supremo fine: comprimere . ... Si tratta ora di capovolgere tutto questo sistema. L'antitesi deve commisurarsi alla tesi. Tutto l'insegnamento deve mirare a dar forza e dignità al popolo. ... Di una cosa fra tutte siamo grati all'illustre Matteucci. Egli rivendica interamente e assolutamente dall'arbitrio ministeriale le scienze: gli studii a chi studia. Fa cordoglio il pensare come la nostra libertà siasi inaugurata coll'abbandonar tutti gli interessi delle scienze alla mente angusta e al superstizioso beneplacito d'un profano. L'estremo grado d'avvilimento, a cui possa calare una nazione, è la servitù dell'insegnamento.
Questo il quadro di riferimento in cui si inquadrano bene le concezioni di Cremona circa l'insegnamento della matematica. Oggi li potremmo chiamare "obiettivi trasversali". L'obiettivo principe indicato da Cattaneo è chiaro "*dar forza e dignità al popolo*" e ciò sarà ottenuto, nella sua concezione, ponendo al centro dell'attenzione del nuovo stato la scuola e l'esercito. Ma a fianco di questi obiettivi sta la ferma rivendicazione dell'autonomia della scuola che non va affidata "*alla mente angusta e al superstizioso beneplacito d'un profano*".
Quando, nel novembre 1860, il giovane professore pronunzia la sua prolusione al corso di geometria superiore dell'Università di Bologna, non dimenticherà il riferimento a Cattaneo, di cui citerà un passo significativo:
La nuova poesia della scienza, esposta in semplice prosa, senza favole, senza persone ideali, senza iperboli, senza canto, invaghisce l'animo e lo sublima ben più che la poesia dei popoli fanciulli ... O giovani poeti, non eleggete la vostra dimora nei sepolcri; lasciate al passato le sue leggende; date una melodiosa parola alla semplice e pura verità; perrocchè questa è la gloria del vostro secolo; e voi non dovreste mostrarvi ingrati, torcendo li occhi dal sole nuovo della scienza a voi concesso, per tenerli confitti nei sogni della notte che si dilegua.
Vale la pena leggere qualche passo di questa Prolusione perché i punti di vista di Cremona vengono ribaditi e chiariti:
Respingete da voi, o giovani, le malevole parole di coloro che a conforto della propria ignoranza o a sfogo d'irosi pregiudizi vi chiederanno con ironico sorriso a che giovino questi ed altri studi, e vi parleranno dell'impotenza pratica di quegli uomini che si consacrano esclusivamente al progresso di una scienza prediletta. Quand'anche la geometria non rendesse, come rende, immediati servigi alle arti belle, all'industria, alla meccanica, all'astronomia, alla fisica; quand'anche un'esperienza secolare non ci ammonisse che le più astratte teorie matematiche sortono in un tempo più o meno vicino applicazioni prima neppur sospettate; quand'anche non ci stesse innanzi al pensiero la storia di tanti illustri che senza mai desistere dal coltivare la scienza pura, furono i più efficaci promotori della presente civiltà - ancora io vi direi: questa scienza è degna che voi l'amiate; tante sono e così sublimi le sue bellezze ch' essa non può non esercitare sulle generose e intatte animo dei giovani un' alta influenza educativa, elevandole alla serena e inimitabile poesia della verità! Lungi dunque da voi questi apostoli delle tenebre; amate la verità e la luce, abbiate fede ne' servigi che la scienza rende presto o

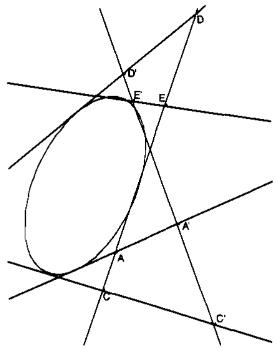
tardi alla causa della civiltà e della libertà. Credete all'avvenire. Questa è la religione del nostro secolo.

La libertà di ricerca e la necessità di puntare sulla ricerca pura sono altri elementi centrali della concezione di Cremona: la scienza pura non può essere subordinata alle immediate necessità applicative; solo vincendo questa sfida la scienza nazionale si inserirà a pieno titolo nel concerto europeo. Anche questo mi sembra di scottante attualità.

Sarebbe mio intendimento mostrare come questi obiettivi che, come ho detto, possiamo chiamare trasversali, si coniughino con gli obiettivi didattici disciplinari, e questi con quelli della ricerca. La Prolusione bolognese di cui ho parlato mostra meglio gli intrecci tra rinnovamento dell'insegnamento e ricerca. Torniamo un attimo alle trasformazioni:

Concepite in un piano due punteggiate o due stelle projettive; subito vi balenerà al pensiero questo problema, quale è la curva inviluppata dalla retta che unisce due punti omologhi delle due punteggiate, e quale è il luogo del punto ove s'intersecano due raggi corrispondenti delle due stelle? In entrambi i quesiti la curva richiesta è una sezione conica che nel primo caso tocca le due rette punteggiate e nel secondo passa poi centri dei due fasci. ... Ovvero imaginate sulla conica due punti fissi ed un punto mobile che percorra la curva: le rette congiungenti i due punti fissi al punto mobile genereranno due fasci proiettivi.

Si noti il susseguirsi dei verbi: *Concepite, balenerà al pensiero, imaginate.* Un vero cimento con le capacità evocative delle parole! Forse si può intuire lo sforzo comunicativo di Cremona attraverso una figura. Le punteggiate proiettive sono le rette AB e A'B'. Punti corrispondenti sono A e A', B e B', C e C', D e D'. Ciò che Cremona afferma è che le rette AA', BB', CC', DD', e più in generale qualsiasi retta che unisca punti corrispondenti è tangente a una conica fissa. Si tratta della ben nota generazione organica delle coniche già trattata da Newton, ma si tratta soprattutto di un metodo ben preciso.



La Prolusione definisce meglio il programma della geometria delle trasformazioni, secondo uno schema che va bene sia per la ricerca di punta, sia per la didattica:

Conoscendo le proprietà di una certa figura, concluderne le analoghe proprietà di un'altra figura dello stesso genere, ma di una costruzione più generale. Conoscendo alcuni casi particolari di una certa proprietà generale incognita di una figura, concluderne questa proprietà generale.

Sarà applicando questo semplice schema alle trasformazioni birazionali che la scuola geometrica italiana conseguirà i suoi strepitosi risultati:

Il 17 marzo 1861, a Torino viene proclamato il regno d'Italia. Ciò pone con sempre

maggiore urgenza il problema della formazione dei tecnici necessari per portare l'industria italiana a livelli europei. Già dal novembre 1860 Cremona aveva peraltro iniziato il corso di Geometria Descrittiva, diretto soprattutto ai futuri ingegneri. Anche se all'inizio Cremona fu tutt'altro che entusiasta di questo incarico, fu proprio attraverso questa esperienza che egli potè trasferire il suo progetto didattico in direzione delle applicazioni tecniche della matematica pura. Anche in questo caso le tendenze internazionali movevano proprio in questa direzione: applicare le punte più avanzate della ricerca alle necessità della tecnologia moderna.
Egli si ispira al corso di Fiedler geometria descrittiva, del Politecnico di Zurigo, che divenne ben presto modello per il futuro Politecnico di Milano.
Il modello cui si ispira Cremona può essere quindi così sintetizzato:
Mettere al servizio delle applicazioni i più avanzati risultati della geometria moderna e svolgere un corso basato sugli aspetti teorici della geometria descrittiva, e quindi sulla geometria proiettiva.
Nel 1867 Cremona è chiamato da Brioschi a insegnare Geometria al Politecnico di Milano, il che lo costringe a sviluppare e affinare i propri metodi. In particolare gli viene affidato l'insegnamento della Statica Grafica, che egli affronta secondo l'indirizzo di Cullmann (1821 – 1881; sempre del Politecnico di Zurigo): uso di metodi geometrici grafici (che evitano lunghi calcoli) per l'insegnamento della Statica, propedeutica alla Scienza delle costruzioni.
Cullmann aveva pubblicato da poco (1865) il suo libro più famoso, *Die Graphische Statik* che introduce lo studio della Geometria Proiettiva come propedeutica alla scienza delle costruzioni.
Uno dei suoi motti era: *das Zeichnen ist die Sprache des Ingenieurs*, il disegno è il linguaggio degli ingegneri. Può essere interessante leggere qualche passo dell'introduzione di questo celebre testo per comprendere gli intendimenti didattici del matematico lombardo (e di Brioschi che lo aveva chiamato a Milano):
Quando, nel 1855, fu creato il Politecnico di Zurigo e noi fummo chiamati al corso di scienza delle costruzioni, fummo obbligati a introdurre nel nostro insegnamento i metodi grafici di Poncelet per sopperire alle lacune dei corsi di meccanica applicata che non utilizzavano allora che i metodi analitici.
Come si vede si tratta di una fusione tra necessità pratiche e teoriche, aspetti applicativi e aspetti formativi nell'insegnamento della matematica, aspetti che non vengono visti come contrapposti, ma come armonicamente integrati.
Questo doppio aspetto si verifica pienamente nel 1867, quando Cremona, Brioschi e Betti intraprendono una battaglia per il *ritorno a Euclide*, almeno nell'insegnamento liceale. Si tratta in qualche modo di un passo indietro rispetto alle posizioni, di dieci anni prima, ma un passo indietro che va visto nella stessa ottica di dotare le scuole italiane di libri di testo validi. Come scrivono i tre matematici nell'introduzione del testo euclideo:
La matematica non deve considerarsi come un complesso di cognizioni utili in sé perché applicabili ai bisogni della vita, ma principalmente come un mezzo di cultura intellettuale, come una ginnastica del pensiero diretta a svolgere le facoltà del raziocinio ed aiutare quel sano criterio che serve a distinguere il vero da ciò che ne ha solo l'apparenza.
Questo atteggiamento nei confronti della matematica portava anche a importanti scelte sul fronte della didattica. Ne cito soltanto due:
1. La scelta del testo classico euclideo quale testo di geometria per i licei. Si tratta di una

scelta "purista" che prevede un'esposizione rigidamente deduttiva della geometria.
2. La scelta, nel 1871, fermamente voluta da Cremona, di introdurre la geometria proiettiva nel secondo biennio degli Istituti tecnici.
Ciò che lo stesso Cremona scrive nell'introduzione del suo testo di Geometria Proiettiva per gli istituti tecnici non differisce poi molto da quanto riferito al testo euclideo. Sia nei licei che negli istituti tecnici, sia che debba servire al futuro avvocato o al futuro ingegnere, la matematica riveste sempre un valore eminentemente formativo:
La vigorosa e nutritiva educazione geometrica, che i giovanetti riceveranno per tal modo negl'istituti tecnici, centuplicherà l'efficacia delle discipline applicative a cui dovranno attendere nelle scuole superiori, e allora il nostro ordinamento scolastico per la formazione degli ingegneri potrà ben reggere il confronto colle migliori istituzioni straniere.
Senza dilungarmi ancora su questi aspetti, mi pare importante sottolineare come, negli intendimenti di Cremona, questo carattere eminentemente *formativo* della geometria doveva essere elemento portante di una nuova politica educativa mirante a fare dell'istruzione scientifica il punto chiave della formazione della nuova classe dirigente. L'istituto tecnico, in questo quadro, veniva a conquistare una quasi pari dignità con il liceo e l'ingegnere era visto come componente essenziale della classe dirigente della nuova Italia.
Sarebbe troppo lungo seguire le tappe degli interessi di Cremona verso la didattica: basti qui ricordare alcune tappe: l'estensione dei programmi del 1867; l'impegno per lo sviluppo degli Istituti tecnici; e poi la carriera politica: Senatore, Presidente del Senato, Ministro della P. I., anche se solo per un mese; il problema del salvataggio dell'insegnamento del greco nei licei, il problema della scuola media unica (cui egli era avverso)...
Vorrei concludere con una citazione di un matematico della generazione successiva a quella di Cremona, Guido Castelnuovo, il cui impegno nei confronti della didattica non fu inferiore:
I precetti e i metodi che la geometria, considerata come scienza sperimentale, avrà insegnato ai giovani, troveranno una brillante conferma nei dettami di un'altra scienza, che, non inferiore a quella per valore educativo, più di quella risente il soffio dello spirito moderno. Alludo alla fisica, di cui ritengo grandissima l'efficacia didattica, purché l'insegnante si proponga, non già di fornire agli allievi una serie di notizie enciclopediche presto dimenticate, ma di mettere in luce i mezzi che l'uomo impiega per penetrare i misteri della natura.
Sono, queste come quelle di Cremona, considerazioni che possono ben far parte del dibattito attuale sulla didattica della matematica. Allora chiudo con una domanda cui non tento nemmeno di dare una risposta:
Er steht alles schon bei Dedekind, era già stato mostrato tutto da Dedekind, diceva Emmy Noether quando si lodavano le sue conquiste nell'algebra moderna.
Era già stato detto tutto:Ma allora perché ricominciamo sempre da capo?